Ciclos económicos reales y contabilidad del ciclo

Macroeconomía avanzada

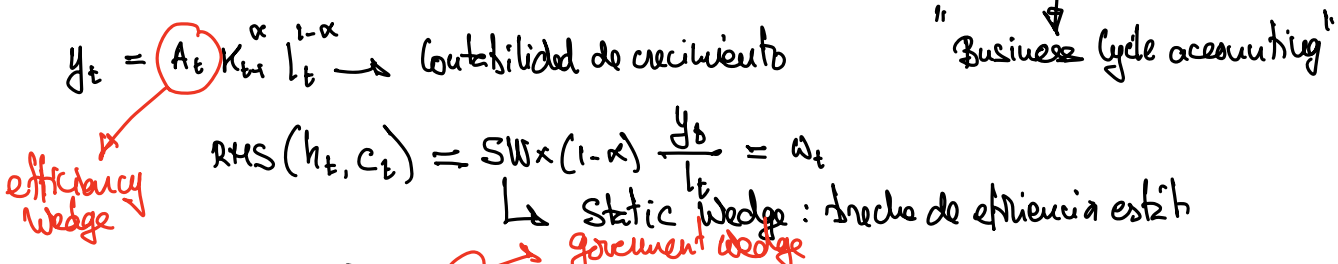
ITAM, Otoño 2026

Semanas 7–8

Introducción

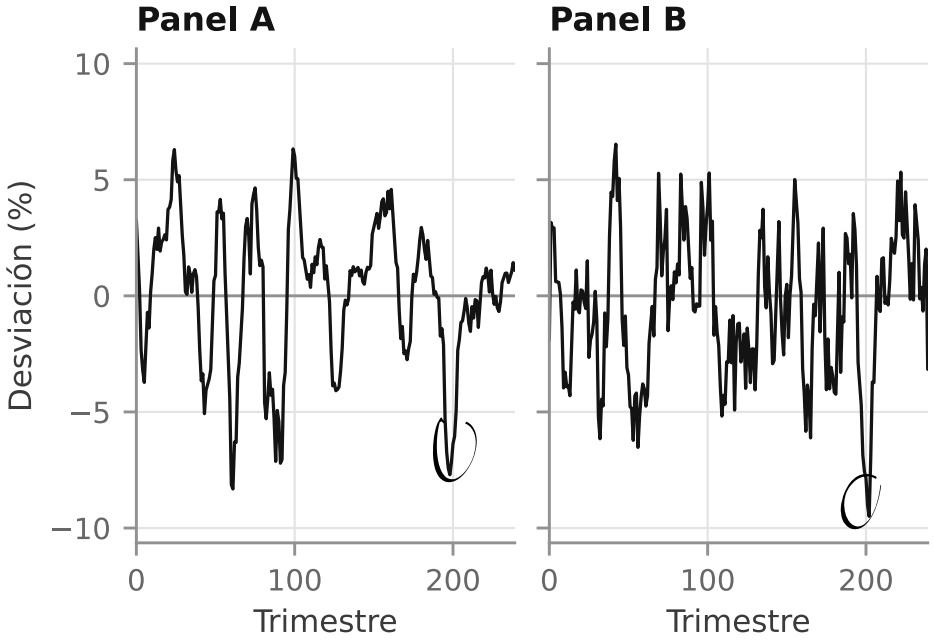
Con los estados de la naturaleza ya sabemos cómo introducir riesgo/incertidumbre para analizar su impacto en una economía agregada. Vamos a aplicar ese conocimiento teórico para estudiar las características de un ciclo "típico" frente a fenómenos cíclicos atípicos, como grandes depresiones y recesiones, o incluso la reacción de las economías ante una pandemia. En concreto vamos a:

- Mostrar cómo un ciclo se parece a un proceso estocástico, como onservó Slutsky
- Mostrar cómo el modelo de ciclos económicos reales reproduce (o no) los segundos momentos del ciclo
- Mostrar cómo todo ciclo puede descomponerse de forma similar a como hacemos contabilidad de crecimiento



El ciclo puede ser fruto del azar: Slutsky

Uno de los dos paneles es el componente cíclico (filtro de Hamilton) del PIB de EUA; el otro, una media móvil de 8 trimestres de puro ruido blanco. ¿Cuál es cuál?



Juglar, Kondrátiev y lo que se lleva el filtro

El nombre viene de Clément Juglar (1862), que documentó una recurrencia de **prosperidad → crisis → liquidación** de 7 a 11 años y la atribuyó al crédito. Slutsky (1927) y Frisch (1933) sustituyeron esa recurrencia por **choques** más **mecanismos de transmisión**: una media móvil sobre ruido blanco basta para producir ciclos "indistinguibles" de los reales.

El acertijo de los datos

Si cambiar la ventana de la media móvil cambia el "periodo" del ciclo, ¿cuánto de Juglar y de Kondrátiev es un artefacto del filtrado? ¿Cuánto depende de usar HP o Hamilton?

La galería histórica completa —Jevons y las manchas solares, Kondrátiev, Mitchell y el comité del NBER— y la receta en ocho líneas están en el apéndice.

Kydland y Prescott: el ciclo se resume en segundos momentos

La caracterización moderna del ciclo implica que las series económicas son procesos estocásticos. Kydland y Prescott (1982) argumentan que los segundos momentos de dichas series ofrecen una caracterización parsimoniosa del ciclo. En el fondo se refieren al **correlograma** y **correlograma cruzado**, dos herramientas de identificación clásicas en la literatura de series temporales.

- Tradicionalmente la literatura reporta la desviación estándar de series como: PIB, consumo, inversión, empleo, horas de trabajo o productividad
- Una medida particularmente popular es la desviación estándar de una variable de interés respecto de la del PIB o **volatilidad relativa**
- Otra medida que típicamente se reporta es la correlación de una variable de interés con el PIB

Una gran parte de la agenda de investigación de esta literatura se ha centrado en documentar segundos momentos en los datos y ver si el MNC, aumentado con incertidumbre y dotado de ciertos mecanismos de transmisión, es capaz de reproducir los momentos encontrados en los datos.

Los momentos de EUA: la vara de medir

La siguiente tabla resume los momentos cíclicos de la economía de EUA sobre el agregado unisectorial: el objeto que nuestro modelo de un solo sector intentará replicar. La comparación con el filtro HP queda en el Módulo 1 de Canvas; la versión multi-país la van a construir ustedes en el siguiente ejercicio.

	y	c	i	e	h/e	ls	a
EUA, filtro de Hamilton ($h = 8, p = 4$), agregado unisectorial							
σ_x/σ_y	—	0.68	1.98	0.62	0.19	0.40	0.56
corr(x, y)	—	0.87	0.92	0.32	0.58	-0.26	0.55
corr(x, a)	0.55	0.77	0.62	-0.31	0.27	-0.32	—

Examinemos si choques aleatorios de productividad, sujetos al mecanismo de transmisión de suavizamiento intertemporal del consumo, pueden reproducir estos hechos empíricos del ciclo económico.

Cuaderno acompañante: `T02_B_rbc_dynare_local`, celda 9 (modelo vs. EUA y México; no genera esta tabla); `T04_B_dashboard_rbc_interactive` es un script.

El modelo de ciclos económicos reales

Vamos a desarrollar una versión empírica del modelo neoclásico que incorpora crecimiento a largo plazo de la población y la productividad, además de una elasticidad de sustitución intertemporal del ocio flexible, a través del siguiente problema de planificación social:

$$\max_{l_t, c_t, k_t} \; E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} N_t \beta^t \left[\log(c_t) + \mu \frac{(1-l_t)^{1-\nu}}{1-\nu} \right] \right\}$$

sujeto a:

$$C_t + K_t - (1-\delta)K_{t-1} = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

donde escribimos la productividad total de los factores como:

$$A_t = (1+\hat{A})^t e^{a_t} A_0$$

$$a_{t+1} = \rho_a a_t + \epsilon_{at+1}$$

$\epsilon_{at+1} \longrightarrow N(0, \sigma_a^2)$ y $A_0 > 0$.

El modelo deflactado

Deflactamos el modelo para que pueda computarse local (log-linealización) o globalmente (programación dinámica), resultando en:

$$\max_{c_t, l_t, k_t} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \left[\log(c_t) + \mu \frac{(1-l_t)^{1-\nu}}{1-\nu} \right] \right\}$$

donde $\tilde{\beta} = \beta(1+\hat{N})$, sujeto a la restricción de recursos deflactada por el crecimiento de la economía en la senda de crecimiento balanceado

$$c_t + (1+g)k_t - (1-\delta)k_{t-1} = e^{a_t} k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

donde

$$a_{t+1} = \rho_a a_t + \epsilon_{at+1}$$

Las tres condiciones de equilibrio

Eficiencia intratemporal

$$\mu(1-l_t^*)^{-\nu}c_t^* = (1-\alpha)e^{a_t}(k_{t-1}^*)^{\alpha}(l_t^*)^{-\alpha}$$

Eficiencia intertemporal

$$E_t\left\{\left[\alpha e^{a_{t+1}}(k_t^*)^{\alpha-1}(l_{t+1}^*)^{1-\alpha}+1-\delta\right]\frac{\beta(1+\hat{N})c_t^*}{c_{t+1}^*}\right\}=1+g$$

Esta restricción también puede escribirse en términos del crecimiento del ingreso por habitante $(1+\tilde{g})=\frac{1+g}{1+\hat{N}}$ de tal forma que

$$E_t\left\{\left[\alpha e^{a_{t+1}}(k_t^*)^{\alpha-1}(l_{t+1}^*)^{1-\alpha}+1-\delta\right]\frac{\beta c_t^*}{c_{t+1}^*}\right\}=1+\tilde{g}$$

Condición de factibilidad

$$c_t^*+(1+g)k_t^*-(1-\delta)k_{t-1}^*=e^{a_t}(k_{t-1}^*)^{\alpha}(l_t^*)^{1-\alpha}$$

Solución por log-linealización

Eficiencia intratemporal

$$\tilde{c}_t + \left(\alpha + \nu \frac{l}{1-l}\right) \tilde{l}_t - \alpha \tilde{k}_{t-1} - a_t = 0$$

Eficiencia intertemporal

$$E_t \tilde{c}_{t+1} - \tilde{c}_t - \left[1 - \frac{\beta(1-\delta)}{1+\tilde{g}}\right] E_t \left\{ \left[a_{t+1} + (1-\alpha) \left(\tilde{l}_{t+1} - \tilde{k}_t \right) \right] \right\} = 0$$

Condición de factibilidad

$$\frac{c}{y}\tilde{c}_t + (1+g)\frac{k}{y}\tilde{k}_t - (1-\delta)\frac{k}{y}\tilde{k}_{t-1} - a_t - \alpha \tilde{k}_{t-1} - (1-\alpha)\tilde{l}_t = 0$$

Método de coeficientes indeterminados

Como vimos en el mazo A2, expresamos el sistema de ecuaciones que depende de los parámetros del modelo, de las variables del modelo en la senda de crecimiento balanceado y de los coeficientes indeterminados que surgen de sustituir las reglas de decisión log-lineales:

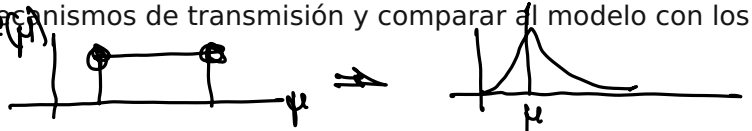
$$\tilde{k}_t = \hat{\psi}_{kA} a_t + \hat{\psi}_{kk} \tilde{k}_{t-1}$$

$$\tilde{c}_t = \hat{\psi}_{cA} a_t + \hat{\psi}_{ck} \tilde{k}_{t-1}$$

$$\tilde{l}_t = \hat{\psi}_{lA} a_t + \hat{\psi}_{lk} \tilde{k}_{t-1}$$

en el sistema log-linealizado. Esto nos lleva a los siguientes pasos:

- **Calibración** para que la economía se parezca en la senda de crecimiento balanceado al país que queramos estudiar
- **Simulación** para poder examinar mecanismos de transmisión y comparar al modelo con los datos



De calibrar a estimar: los datos también pueden elegir los parámetros

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{c_t}\frac{1-l_t}{l_t} \qquad \mu \sim U(\underline{\mu}, \bar{\mu}) : \text{Prior}$$

La calibración fija los parámetros con momentos de la senda de crecimiento balanceado. La alternativa es **estimarlos** con las mismas series que el modelo pretende explicar — solo conceptual por ahora; la teoría llega en el bloque econométrico del curso:

- **Máxima verosimilitud**: la solución log-lineal es un sistema de espacio de estados; el filtro de Kalman entrega la verosimilitud de los datos y `puremacro.dsge` permite estimar los parámetros
- **Métodos bayesianos**: priors sobre los parámetros $\times$ verosimilitud $\rightarrow$ distribución posterior, aproximada por MCMC; es el estándar actual para modelos DSGE
- **Business Cycle Accounting** (Chari, Kehoe y McGrattan, 2007): en vez de estimar parámetros, mide las "cuñas" que harían que las condiciones de equilibrio se cumplieran exactamente en los datos, y pregunta qué fricción se esconde detrás de cada cuña

Smets y Wouters (2007); Chari, Kehoe y McGrattan (2007); Fernández-Villaverde, Rubio-Ramírez y Schorfheide (2016).

Simulación

$K_0 = 0$ $a_0 = 0$: productividad a largo plazo

$a_{t+1} = \rho a_t + \varepsilon_{at+1}$

Primero necesitamos calcular el estado estacionario. Para preferencias homotéticas y tecnología Cobb–Douglas podemos obtener el estado estacionario de forma analítica. En este ejemplo, no. Es necesario resolver numéricamente la condición de eficiencia estática en la senda de crecimiento balanceado, como en el mazo A2. El siguiente paso es obtener los coeficientes indeterminados y ejecutar una **simulación de Montecarlo**:

- Obtenemos una simulación de choques a la productividad $\overrightarrow{\epsilon}_T$ para un T grande
- Simulamos iterativamente A_t y K_t para la secuencia de choques aleatorios
- Obtenemos las reglas de decisión para el trabajo y el consumo
- Aplicamos el filtro HP o de Hamilton a las simulaciones, para medir exactamente el mismo objeto estadístico en el modelo y en los datos
- Simulamos momentos como lo hicimos con los componentes cíclicos de los datos y calculamos funciones de impulso respuesta

Modelos DSGE declarativos: archivos `.mod` y `puremacro.dsge`

Para automatizar la diferenciación simbólica, el cálculo del estado estacionario y la perturbación de primer orden, la literatura utiliza especificaciones declarativas escritas en archivos `.mod` (estándar de Dynare). En este curso resolvemos el modelo en **Python puro** mediante el módulo `puremacro.dsge`:

```
from puremacro.dsge import load_mod

# 1. Cargar la especificación declarativa .mod (Dynare estándar, sin MATLAB)
m = load_mod("modelos/rbc_canonico.mod")

# 2. Resolver perturbación de 1.er orden vía descomposición QZ de Klein (2000)
res = m.stoch_simul(order=1, irf=40)
```

Todo archivo `.mod` organiza el modelo en cuatro bloques fundamentales:

- **Variables**: endógenas (`var`) y choques exógenos (`varexo`).
- **Parámetros**: asignación numérica calibrada (`parameters`).
- **Modelo**: ecuaciones no lineales de equilibrio y CPO (`model`).
- **Computación**: estado estacionario (`steady_state_model`) y choques (`shocks`).

El mapa del archivo `.mod`

Todo archivo `.mod` recorre los mismos bloques — los comentarios se escriben como `//`, `/* */` o `%`:

```
var c k l y a;                    // 1. endogenas
varexo e_a;                       //    exogenas (innovaciones)

parameters alpha beta delta mu nu rho_a g;
alpha = 0.33; beta = 0.99;        // 2. asignacion de valores
// ...

model;                            // 3. CPO + factibilidad + proceso de a_t
// eficiencia intra e intertemporal, restriccion de recursos, AR(1) de a
end;

steady_state_model;               // 4a. estado estacionario
// ...
end;

shocks;                           // 4b. choques
var e_a; stderr 0.007;
end;

stoch_simul(order=1, irf=40, hp_filter=1600);   // 4c. simulacion
```

```
var y       ${y}$ (long_name='Produccion')
    c       ${c}$ (long_name='Consumo')
    k       ${k}$ (long_name='Capital')
    l       ${l}$ (long_name='Horas')
    z       ${z}$ (long_name='Productividad')
    % Tambien definimos las variables en logaritmos
    log_y   ${\log(y)}$ (long_name='log producction')
    log_c   ${\log(c)}$ (long_name='log consumo')
    log_k   ${\log(k)}$ (long_name='log capital')
    log_l   ${\log(l)}$ (long_name='log horas')
    ;

% Declaramos las variables exogenas
varexo e    ${\varepsilon_z}$ (long_name='Choque PTF')
    ;

% Declaramos los parametros
parameters
    beta    ${\beta}$       (long_name='Paciencia')
    alpha   ${\alpha}$      (long_name='Peso del capital')
    delta   ${\delta}$      (long_name='Tasa de depreciacion')
    mu      ${\mu}$         (long_name='Peso del ocio')
    sigma   ${\sigma}$      (long_name='IES consumo')
    nu      ${\nu}$         (long_name='IES ocio')
    rho     ${\rho}$        (long_name='Autocorrelacion')
    sigmae  ${\sigma_e}$    (long_name='Ruido')
    ky      ${\frac{k}{y}}$ (long_name='Ratio de capital producto')
    ;
```

```
model;
[name='Eficiencia intratemporal']
mu*c^sigma*(1-l)^(-nu)*l-(1-alpha)*y = 0;
[name='Ecuacion de Euler']
beta*(c/c(+1))^sigma*(alpha*y(+1)/k+1-delta) = 1;
[name='Tecnologia']
y = exp(z)*k(-1)^alpha*l^(1-alpha);
[name='Restriccion de recursos']
y = c+k-(1-delta)*k(-1);
[name='Proceso estocastico']
z = rho*z(-1)+ e;
[name='log produccion']
log_y = log(y);
[name='log consumo']
log_c = log(c);
[name='log capital']
log_k = log(k);
[name='log horas']
log_l = log(l);
end;

% Definimos las ecuaciones en el estado estacionario
steady_state_model;
z = 0;
l  = .33;
k  = (alpha*exp(z)/(1/beta-1+delta))^(1/(1-alpha))*l;
y  = exp(z)*k^alpha*l^(1-alpha);
c  = y-delta*k;
mu =(c^(-sigma)*(1-alpha)*y*(1-l)^nu)/l;
log_y = log(y);
log_k = log(k);
log_c = log(c);
log_l = log(l);
end;
```

Calibrando μ

```
stoch_simul(order=1,
            irf=100,
            relative_irf,
            conditional_variance_decomposition=100,
            tex
) log_c log_k log_y log_l;

write_latex_original_model;
```

orden de aprox

De la solución a los momentos: tres experimentos diferentes

Experimento	Qué cambia	Qué reportamos
IRF	Un choque, con tamaño declarado	Respuesta por horizonte
Simulación	Una secuencia de innovaciones	Momentos, tras aplicar el mismo filtro que a los datos
FEVD	Todas las fuentes de riesgo	Contribución a la varianza del error de pronóstico

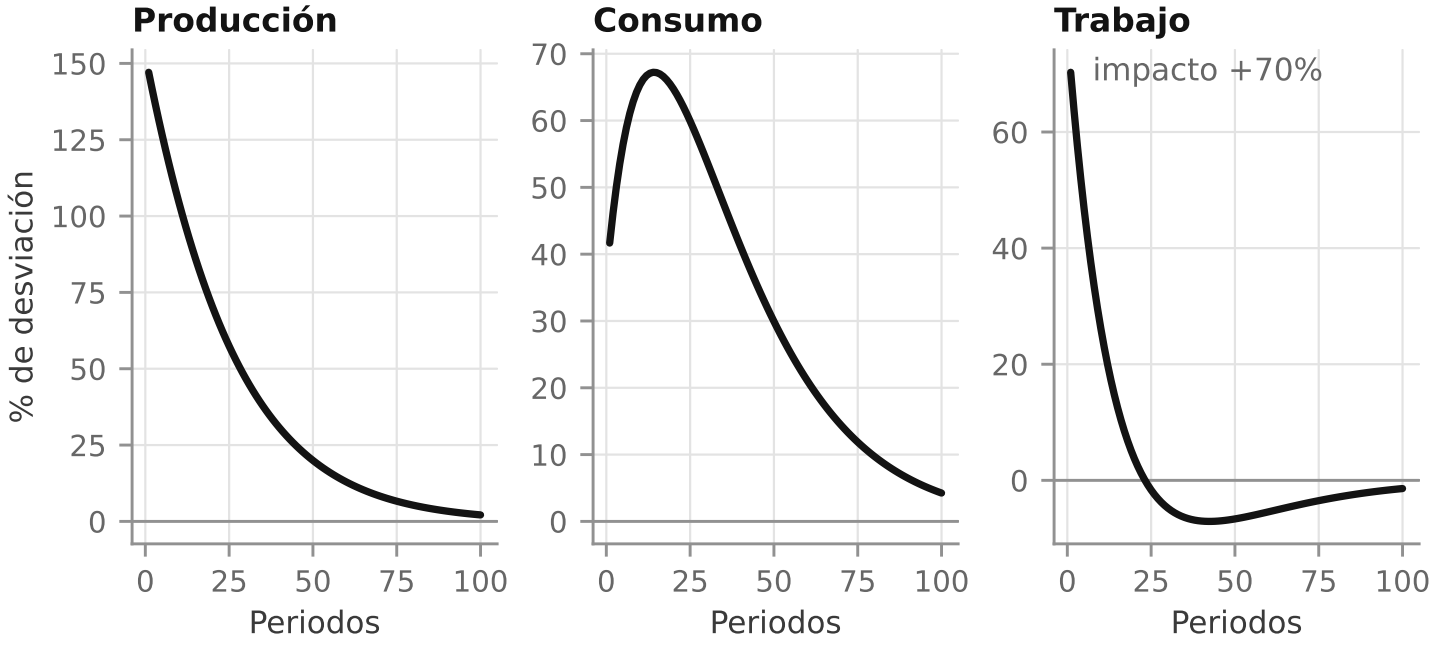
En Python

`load_mod` carga el modelo; `m.solve(order=1)` obtiene la solución local; `m.irf(...)` y `m.simulate(...)` realizan experimentos distintos. La solución ofrece `sol.fevd(...)`.

Antes de comparar con México: misma frecuencia, transformación, muestra efectiva y filtro. Con un solo choque la FEVD le asigna el 100 %; eso no prueba que explique el 100 % del ciclo observado.

Funciones de impulso respuesta

La respuesta del producto, el consumo y el trabajo ante el choque tecnológico:



Persistencia y comovimiento característicos del modelo neoclásico: el suavizamiento intertemporal deja $\sigma_c < \sigma_y$ y la inversión absorbe la mayor parte del choque. Fíjense en el signo de las horas: en el modelo **suben**, y ése es el signo que Galí (1999) lleva a los datos.

El signo de las horas exige decidir qué estamos contrastando

Objeto	Predicción o estimación	Qué puede fallar
RBC del curso	Horas suben tras $e_a > 0$	Mecanismo de transmisión o calibración
SVAR de Galí	Horas caen en impacto	Restricción de largo plazo, muestra o dinámica
Comparación	Signos opuestos	¿Representan ambos choques el mismo cambio tecnológico?

La figura y la réplica están en A2 y T02_B. Galí (1999); Christiano, Eichenbaum y Vigfusson (2003).

$u($

Receta: repliquen a Galí con `bq_svar`

```
from puremacro.var.identify.bq import bq_svar
import pandas as pd, numpy as np
from pathlib import Path;  DATA = Path('data_curso')   # el bundle de las lecciones

df = pd.read_csv(DATA / 'gali1999.csv', parse_dates=['date'])  # ophnfb, hoanbs, cnp16ov
df = df[df['date'] <= '2007-12-31']              # la muestra de la figura
x  = 100*np.log(df['ophnfb'])                    # productividad del trabajo
n  = 100*np.log(df['hoanbs']/df['cnp16ov'])      # horas per capita
Y  = np.column_stack([x.diff(), n.diff()])[1:]
res = bq_svar(Y, p=4, horizon=20, permanent_var_idx=0)
print(res.irf_point[0, 1, 0].round(2))           # horas en impacto: -0.24
```

Superpongan la IRF empírica sobre la de Dynare. ¿Falla el modelo o falla la identificación? Si se estima en niveles, el signo se revierte (CEV 2003). Cuando no estamos seguros de la precisión de algún parámetro — ¿o de un mecanismo? — el paso natural es un **análisis de sensibilidad**: vamos a analizar las IRFs para distintos valores de ν, la curvatura del ocio ($1/\nu$ gobierna la elasticidad de Frisch del trabajo).

Galí (1999); Christiano, Eichenbaum y Vigfusson (2003); Francis y Ramey (2005).

Sensibilidad: variar una elasticidad sin mover el estado estacionario

En el modelo $\eta = (1 - \bar{l})/(\nu \bar{l})$. Si cambiamos ν sin recalibrar el peso del ocio, cambian también las horas de largo plazo.

1. Fijen $\bar{l} = 0.33$ y el resto de la calibración.
2. Recorran $\nu \in \{0.2, 0.5, 1, 2, 5\}$ y recalibren μ para conservar $\bar{l}$.
3. Apliquen el mismo impulso de productividad, en las mismas unidades.
4. Registren impacto de las horas, persistencia y σ_l/σ_y con el mismo filtro.

Predicción antes de ejecutar

Una Frisch mayor debería amplificar las horas. ¿Hay algún valor del barrido que cambie su signo en impacto? Si no lo hay, variar ν no resuelve esa discrepancia.

El abanico de IRFs está en A2; aquí cambia la pregunta: aislar el mecanismo. Cuaderno: T02_B.

¿Margen intensivo o extensivo? El dato detrás de ν

La sensibilidad a ν supone que todo el ajuste del trabajo es margen intensivo (horas por trabajador). Descompongan la varianza de las horas totales, país a país — por fin usamos las columnas e y h/e de la tabla inicial:

```
import numpy as np, pandas as pd
from pathlib import Path;  DATA = Path('data_curso')   # el bundle de las lecciones
lab = pd.read_csv(DATA / 'oecd_qna_labor_margenes.csv', parse_dates=['date'])
w = lab[lab['code'].isin(['MEX','DEU','ESP','FRA'])].pivot_table(
        index=['code','date'], columns='variable', values='value')
fred = lambda s: pd.read_csv(DATA / f'{s}.csv', index_col=0, parse_dates=True)[s]
usa = pd.DataFrame({'log_hours_qna': np.log(fred('AWHI')),    # BLS via FRED
                    'log_emp_qna': np.log(fred('USPRIV'))})
usa = usa.resample('QS').mean().loc['1995':]           # horas y empleo, EUA
w = pd.concat([w, pd.concat({'USA': usa}, names=['code','date'])])
dH = 100*w.groupby('code')['log_hours_qna'].diff()     # horas totales
dE = 100*w.groupby('code')['log_emp_qna'].diff()       # empleo
d = pd.DataFrame({'E': dE, 'h': dH - dE, 'H': dH}).dropna()
def reparto(x):  # var(dH) = var(dE) + var(dh) + 2cov(dE,dh), sobre var(dH)
    return pd.Series({'E': x.E.var(), 'h': x.h.var(),
                      '2cov': 2*x.E.cov(x.h)}) / x.H.var()
fecha = d.index.get_level_values('date')
print(d.groupby('code').apply(reparto).round(2))                 # todo
print(d[fecha < '2020'].groupby('code').apply(reparto).round(2)) # sin COVID
```

El caché de las lecciones (`oecd_qna_labor_margenes.csv`) cubre DEU, ESP, FRA y MEX (MEX desde 2005; KOR sólo trae empleo); EUA no está en él y entra por las series de la BLS en FRED (`AWHI`, `USPRIV`), congeladas en el mismo bundle. En línea, `fetch.qna_labor(codes, start='1995')` trae la QNA en niveles: tomen logaritmos antes de diferenciar.

La pandemia cambia el reparto entre empleo y horas

La identidad $\Delta \log H = \Delta \log E + \Delta \log(H/E)$ permite comparar episodios sin volver a mostrar toda la serie.

- En toda la muestra, $\mathrm{var}(\Delta \log E)/\mathrm{var}(\Delta \log H)$ es 0.81 en EUA y 0.89 en México.
- En Alemania, España y Francia está entre 0.04 y 0.10: las suspensiones de empleo de 2020 desplazaron mucho ajuste a las horas.
- Estas razones no suman uno con la razón intensiva: falta el término de covarianza.

Prueba del mecanismo

Repitan la cuenta hasta 2019 y después para 2020–2021. ¿Qué institución o restricción debe añadir el modelo para reproducir el cambio de margen?

Series y figura en A1; T01_B, sección de márgenes laborales.

$$u_{it} = \log(c_{it}) + \mu \frac{(1-l_{it})^{1-\upsilon}}{1-\upsilon}$$

$$\upsilon = 1 \Rightarrow \log \quad \frac{1}{\upsilon} = 1 \qquad \upsilon \simeq 5$$

$$c_{it} = c_t$$

$$E\, u_{it} = \log(c_t) + \pi_t \frac{(1-\bar{h})^{1-\upsilon}}{1-\upsilon} + (1-\pi_t)\frac{1}{1-\upsilon}$$

Trabajo indivisible: la lotería de empleo vuelve lineal la desutilidad agregada

$h_{it} \in \{0, \bar{h}\}$ π_{it}

Hansen (1985): cada persona trabaja una jornada fija $\bar{h}$ o no trabaja. **Rogerson (1988)**: el hogar sortea quién trabaja con una **lotería de empleo** con seguro perfecto — elige la probabilidad de empleo π_t y todos consumen lo mismo. La utilidad esperada del periodo es

$$\log(c_t) + \pi_t \, \mu \frac{(1-\bar{h})^{1-\nu}}{1-\nu} + (1-\pi_t) \, \mu \frac{1}{1-\nu}$$

Con horas agregadas $l_t = \pi_t \bar{h}$, la utilidad del hogar queda **lineal en el trabajo**:

$$\log(c_t) + \frac{\mu}{1-\nu} - B \, l_t, \qquad B \equiv \frac{\mu \left[1 - (1-\bar{h})^{1-\nu}\right]}{(1-\nu)\,\bar{h}} > 0$$

La desutilidad marginal del trabajo agregado es constante: la elasticidad de Frisch **macro** es infinita aunque la elasticidad micro de cada trabajador sea ≈ 0.5. Esa es la respuesta a la pregunta de qué ν "macro" emerge: con margen extensivo dominante, el agregado se comporta como el límite $\nu \to 0$, sin importar el ν micro.

Trabajo indivisible: qué mejora y qué deja sin explicar

Con loterías de empleo y seguro completo	Límite de la explicación
El empleo puede ajustarse aunque cada empleado trabaje horas fijas	La lotería no describe cómo se busca un puesto
La respuesta agregada de horas aumenta	Las horas siguen subiendo tras el choque tecnológico de esta calibración
La volatilidad relativa se acerca a los datos	No determina vacantes, duración del desempleo ni separaciones

Predigan: si introducimos costos de encontrar un empleo, ¿qué parte de la respuesta debería dejar de ser instantánea?

Hansen (1985); Rogerson (1988). La derivación y su figura comparativa se desarrollan en B1.

Mismo choque, dos ofertas laborales: qué compra la indivisibilidad

Con desutilidad lineal (Frisch $\to \infty$) la respuesta de las horas en impacto es ≈ 2 veces la del caso divisible log-log.

Con esto se cierra el círculo de la sensibilidad a ν

El margen extensivo no "elige" un ν intermedio de calibración: empuja la economía agregada al extremo más elástico — y acerca σ_h/σ_y a la del dato.

El precio: el modelo sigue sin desempleo involuntario, la puerta a los modelos de emparejamiento.

Cuadernos acompañantes: `T02_B_rbc_dynare_local`, celda 13 — el barrido de ν y el caso de Hansen ($\nu = 0$): la respuesta de impacto de las horas pasa de 0.234 con $\nu = 1$ a 0.496, es decir $\times 2.1$, y $\sigma(l)/\sigma(y)$ (logs, HP) sube a 0.75, frente a 0.86 en EUA.

`T04_A_tax_multiplier_three_ways` (multiplicadores fiscales con trabajo divisible de Hansen vs. indivisible).

Choques y suavizamiento intertemporal del consumo

Con las herramientas que hemos desarrollado vamos a evaluar el efecto que tienen los choques que hemos estudiado en la parte empírica a través del mecanismo de transmisión que es el suavizamiento intertemporal del consumo:

- Choques tecnológicos neutrales y no neutrales
- Choques al gasto público y a los impuestos
- Choques de demanda
- Choques a la incertidumbre

Choques neutrales y no neutrales

Vamos a ilustrar el cálculo de la descomposición de la varianza resolviendo un problema muy similar al anterior, pero vamos a añadir choques específicos no neutrales a la inversión, aunque nos abstraemos de cualquier crecimiento de la población o productividad total de los factores neutral o no neutral.

$$\max_{c_t, l_t, k_t} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \mu \frac{(1-l_t)^{1-\nu}}{1-\nu} \right] \right\}$$

$$c_t + \frac{k_t - (1-\delta)k_{t-1}}{q_t} = e^{a_t} k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

donde

$$a_{t+1} = \rho_a a_t + \epsilon_{at+1}$$

$$\log(q_{t+1}) = \rho_q \log(q_t) + \epsilon_{qt+1}$$

donde los errores $[\epsilon_{at+1}, \epsilon_{qt+1}]$ siguen una distribución normal multivariada $N(0, \Sigma)$. Escribir el proceso de q_t en logaritmos garantiza $q_t > 0$ (divide a la inversión) y fija su mediana (media geométrica) de largo plazo en uno.

El reto no es resolver el modelo: es medir q_t

Añadir más elementos a un modelo presenta varios retos. Uno es el de su solución numérica (no en la mayoría de nuestros ejemplos). El más importante es cómo encontrar una contrapartida empírica de los elementos que introducimos. En concreto:

- Existe una literatura bastante amplia que obtiene valores para σ y ν de datos agregados y microdatos
- Existe una tradición económica de más de medio siglo dedicada a medir la productividad total de los factores a_t
- Pero no tenemos tanta idea sobre cómo medir la evolución agregada de la calidad de los bienes de inversión q_t

¿Cómo medimos q_t? El precio relativo de la inversión, invertido

Greenwood et al. (1997) y (2000) son buenos puntos de partida para profundizar en el tema del cambio en la calidad de los bienes de inversión y sus implicaciones a corto y a largo plazo. Nosotros vamos a seguir el enfoque más sencillo y suponer que el precio relativo de la inversión es inversamente proporcional a la calidad

$$q_t \propto \frac{1}{p_{it}}$$

y que el logaritmo del deflactor de la formación bruta de capital fijo es estacionario en torno a una tendencia cuadrática, cuyo componente estacionario sería

$$\log(p_{it+1}) = (1-\rho_i)p_i + \rho_i \log(p_{it}) + \epsilon_{it+1}$$

por lo que el proceso de calidad de bienes de inversión quedaría definido por

$$\log(q_{t+1}) = -(1-\rho_i)p_i + \rho_i \log(q_t) - \epsilon_{it+1}$$

donde $\epsilon_{it+1} \longrightarrow^{iid} N(0, \sigma_i^2)$. Greenwood et al. (2000) encuentran $\rho_i = 0.64$ y $\sigma_i = 0.03$, un proceso menos persistente y más ruidoso que el que suele encontrarse para la productividad total de los factores, aunque tengan en cuenta que el enfoque de los autores es más complejo que el sugerido en el texto.

Medir el choque de inversión empieza por elegir el proceso

Ya vimos la caída de PERIC y PIRIC en A1. Ahora necesitamos una innovación para el modelo.

1. Elijan equipo o inversión total y documenten el ajuste de calidad.
2. Estimen una tendencia en $\log p_I$ y prueben la estabilidad de su componente residual.
3. Comparen con un modelo para $\Delta \log p_I$. Son dos procesos económicos distintos.
4. Trasladen la innovación a $q_t = 1/p_{It}$: el signo se invierte.

No intercambiar parámetros de niveles y crecimiento

Un AR(1) estable para el crecimiento del precio no justifica imponer ese mismo AR(1) al nivel de q_t. Si el nivel tiene tendencia estocástica, hay que reformular y destendencializar el modelo.

Greenwood, Hercowitz y Krusell (2000); Fisher (2006); DiCecio (2009).

Receta: estimen el AR(1) del precio relativo del equipo

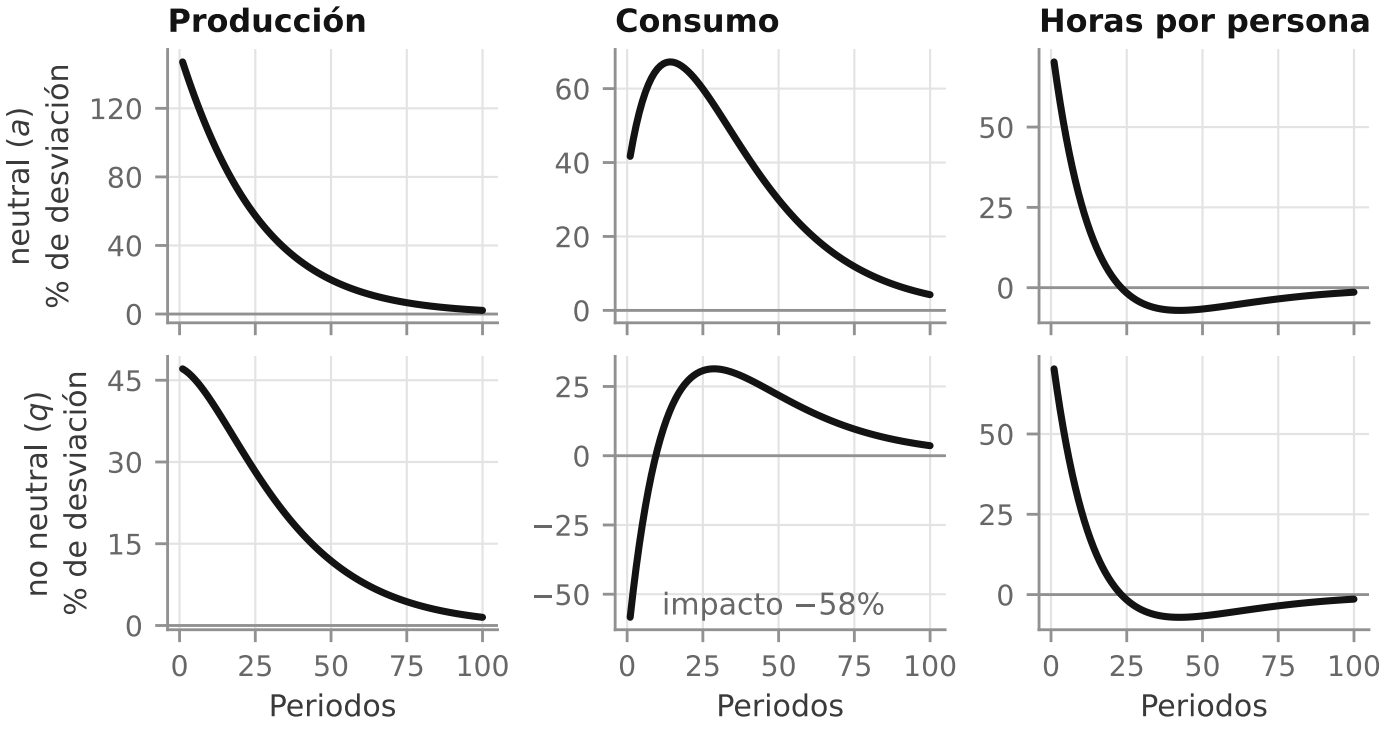
```
# Actualizacion en linea: requiere red; registra la anada.
from puremacro import fetch
import numpy as np, statsmodels.api as sm

p = np.log(fetch.fetch_fred('PERIC'))            # precio relativo del equipo
t = np.arange(len(p))
X = sm.add_constant(np.column_stack([t, t**2]))
pc = sm.OLS(p, X).fit().resid.to_numpy()         # tendencia cuadratica fuera
ar = sm.OLS(pc[1:], sm.add_constant(pc[:-1])).fit()
rho_hat, sig_hat = ar.params[1], ar.resid.std()  # sale rho~1.01, sig=.009
d = np.diff(p.to_numpy())                        # la salida: en Delta log
ar_d = sm.OLS(d[1:], sm.add_constant(d[:-1])).fit()   # rho=.60, sig=.008
```

Usamos `to_numpy()` para alinear observaciones rezagadas por posición, sin que pandas vuelva a emparejar las fechas. **Y si les sale** $\hat{\rho}_i \approx 1.01$ **no se equivocaron:** una tendencia cuadrática no estacionariza $\log(p_{it})$ a frecuencia trimestral, y $\hat{\sigma}_i = 0.009$ queda muy por debajo del 0.03 del texto. En $\Delta \log$ sí sale un AR(1) manejable, $\hat{\rho} = 0.60$ y $\hat{\sigma} = 0.008$, cerca del 0.64 de los autores: no trasladen esos parámetros al nivel de q_t. Estimen un proceso estacionario coherente con el modelo o incorporen crecimiento estocástico y vuelvan a destendencializar antes de comparar la FEVD. Extensión multi-país (opcional): `data_curso/korv_panel_klems.csv` viaja con las lecciones, con $\Delta \log(P_K/P_C)$ anual de 25 países en `dlog_pk_pc`; `puremacro.klems.load_klems_panel` (`include_investment=True`, `equip_def='tangible'`) es la vía general, pero exige montar a mano el árbol crudo de EU-KLEMS, que **no** se distribuye.

Greenwood, Hercowitz y Krusell (2000); Fisher (2006); DiCecio (2009); Justiniano, Primiceri y Tambalotti (2010).

Funciones de impulso respuesta



La FEVD responde a la calibración de los choques

Con $\rho_q = 0.60$ y $\sigma_q = 0.008$, la descomposición de A2 arroja:

Contribución	$h = 1$	$h = 40$
PTF neutra a la varianza del producto	$83\,\%$	$97\,\%$
Choque de inversión a la varianza de la inversión	$62\,\%$	$27\,\%$

Predigan antes del barrido:

- Si duplicamos σ_q, ¿se duplica su contribución no normalizada a la varianza o se cuadruplica?
- ¿Por qué su participación porcentual no se cuadruplica necesariamente?
- ¿Cambiaría la IRF a un impulso de tamaño fijo? ¿Y a un impulso de una desviación estándar?

Choques ortogonales y solución de primer orden. Una FEVD calibrada no identifica por sí sola la importancia histórica de cada choque.

Sensibilidad: ν mueve las IRFs; σ_q, la descomposición de la varianza

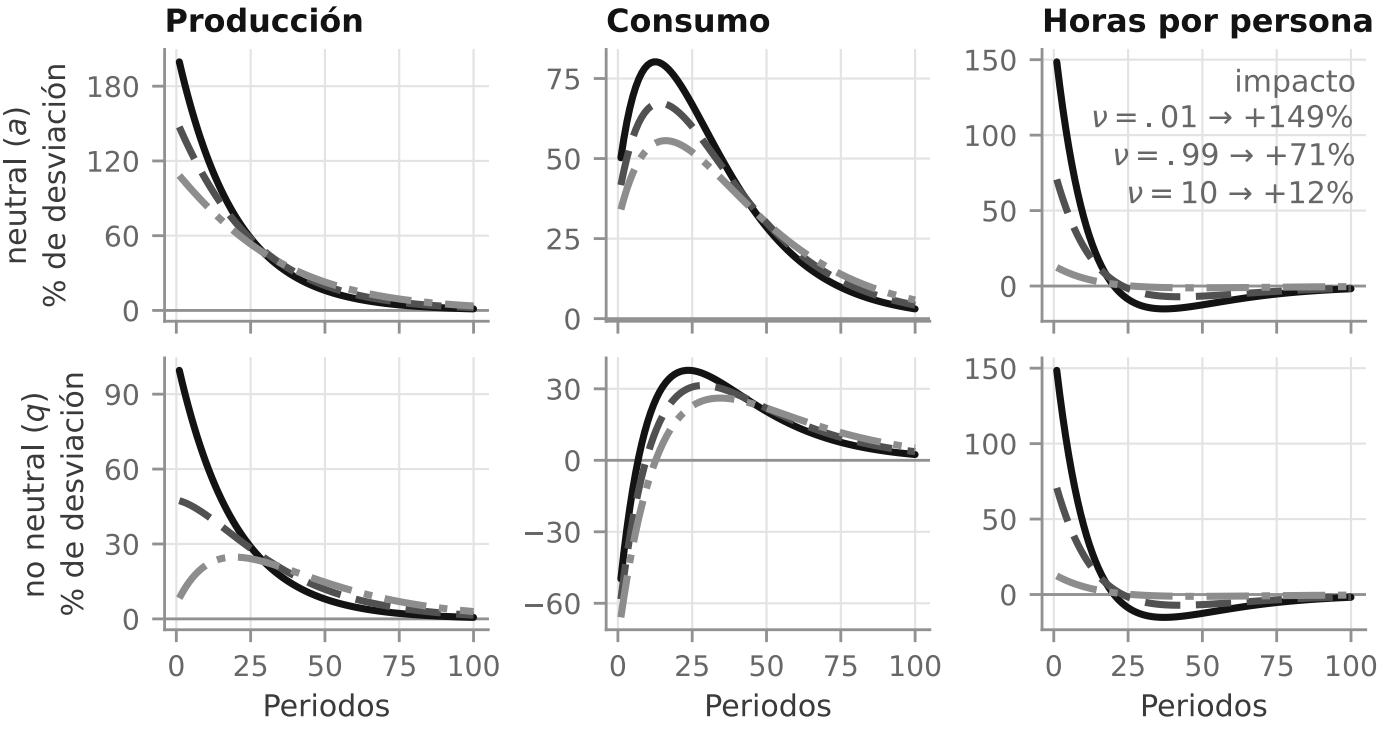
Repetimos la simulación estocástica para distintos valores de ν (curvatura del ocio) y de σ_q. Cada parámetro opera sobre un objeto distinto: en la lámina siguiente, las IRFs para tres valores de ν; en la de después, la VD para tres valores de σ_q (las figuras complementarias están en el apéndice).

Principio: ν mueve las IRFs pero apenas la descomposición de la varianza; σ_q, al revés.

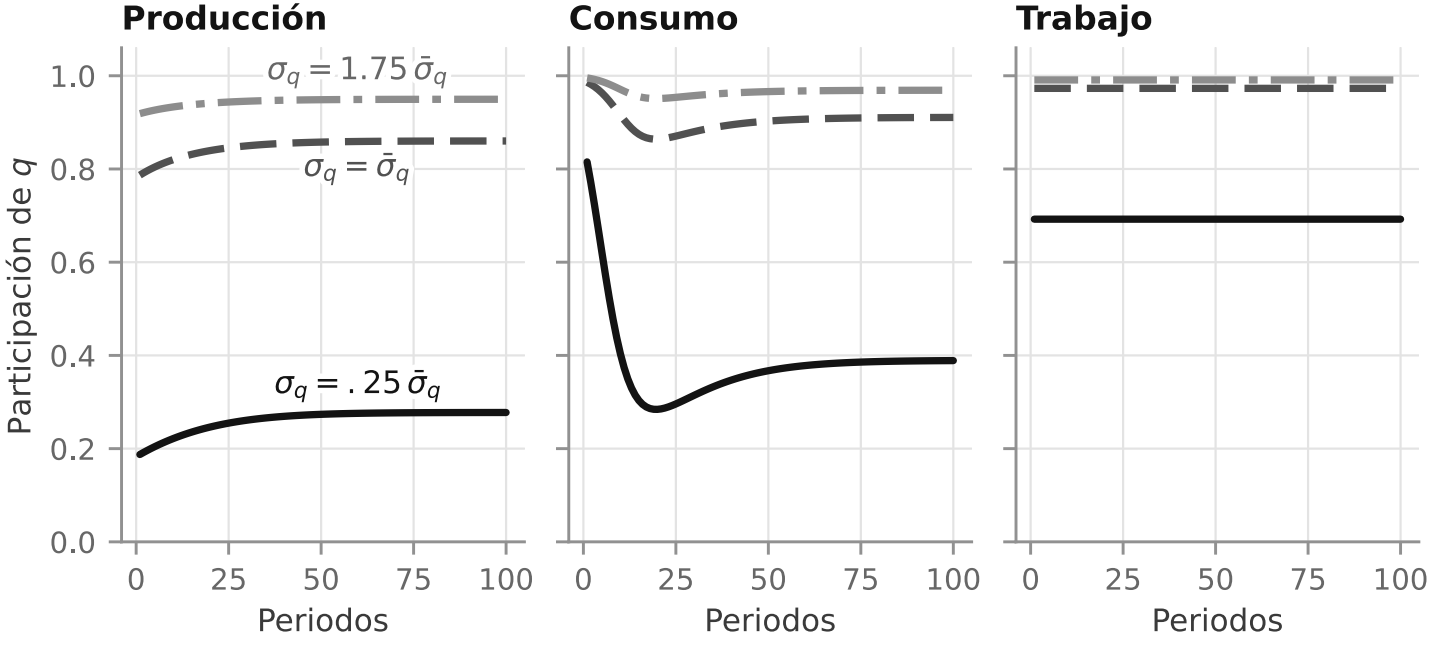
No obstante, los investigadores considerarían que el modelo carece de elementos esenciales para que cambios en incertidumbre sean relevantes, como costos de ajuste o uso variable del capital, costos de ajuste de la mano de obra y uso de aproximaciones de tercer orden.

Sensibilidad a ν: las IRFs se desplazan

$$u(c,h) = \log(c) + \mu \frac{(1-h)^{1-\nu}}{1-\nu} \qquad \frac{1}{\nu}$$



Sensibilidad a σ_q: cambia la descomposición de la varianza



Choques fiscales: los impuestos obligan a descentralizar el modelo

Con impuestos distorsionantes no se cumplen los teoremas del bienestar: el modelo se escribe de forma descentralizada, con precios de factores w_t y p_{kt} (la motivación completa, en el apéndice):

$$\max_{c_t, l_t, k_t, b_t} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{(c_t + \psi G_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \mu \frac{(1-l_t)^{1-\nu}}{1-\nu} \right] \right\}$$

sujeto a:

$$c_t + \frac{k_t - (1-\delta)k_{t-1}}{q_t} + b_t = (1-\tau_t)\left(w_t l_t + p_{kt} k_{t-1}\right) + (1 + r_{t-1}) b_{t-1} + \Omega_t^*$$

donde

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= (1-\rho_a)a + \rho_a a_t + \epsilon_{at+1} \\ q_{t+1} &= (1-\rho_q)q + \rho_q q_t + \epsilon_{qt+1} \\ \tau_{t+1} &= (1-\rho_\tau)\tau + \rho_\tau \tau_t + \epsilon_{\tau t+1} \\ g_{t+1} &= (1-\rho_g)g + \rho_g g_t + \epsilon_{gt+1} \end{aligned}$$

donde los errores siguen una distribución normal multivariada $N(0, \Sigma)$; $G_t = g_t y_t$ es el gasto público, con g_t su participación en el PIB, y Ω_t^* es la transferencia que cierra el presupuesto público (las dos formas de cerrarlo — balanceado o con deuda — están en el apéndice).

Aquí escribimos q_t en niveles con media $q > 0$ como aproximación local; la versión en logaritmos de la lámina de choques no neutrales es la que garantiza $q_t > 0$ globalmente.

De dos a cuatro choques: ¿qué observables permiten separarlos?

Choque	Dónde entra	Información adicional
PTF neutra	Producción	Productividad ajustada por utilización
Inversión	Capital instalado por unidad de gasto	Precio relativo y composición de la inversión
Impuestos	Rendimientos netos de factores	Cambios legislativos y tasas marginales
Gasto público	Recursos disponibles	Compras, anuncios y calendario presupuestario

La figura de cuatro choques de A2 ilustra cómo repartir varianza. Para convertirla en evidencia hay que estimar o justificar sus procesos y declarar las restricciones de identificación.

Discusión: ¿qué par de choques sería más difícil de distinguir si solo observamos el PIB?

Debate: el auge de la IA — ¿a_t, q_t o ζ_t?

Los choques de demanda entran por las preferencias: ζ_t altera el descuento intertemporal mediante el factor $\prod_{s=0}^{t-1} e^{\zeta_s}$ y θ_t multiplica a la utilidad del ocio; ambos siguen AR(1) (el modelo completo, en el apéndice).
Clasifiquen ahora el auge de centros de datos 2023–2026: tres hipótesis con implicaciones observables (comovimiento C–I, precio relativo del equipo, descomposición de la varianza condicional):

- ¿Choque de noticias (*news shock*) de PTF futura (Beaudry–Portier)? La inversión sube hoy por una productividad que todavía no aparece en a_t
- ¿Δq? El costo de cómputo cae más rápido que nunca: sería el choque q_t que acaban de estimar
- ¿ζ_t? Una fiebre inversora: choque al descuento intertemporal sin contrapartida tecnológica

Anclas de datos: la participación de la propiedad intelectual en la inversión fija no residencial (`Y001RC1Q027SBEA/PNFI`) ronda el $40\,\%$, cerca de su máximo histórico ($41.6\,\%$ en 2021Q4) —la serie completa, en el apéndice—; `PIRIC` sigue cayendo.
Cierre incómodo: si es ζ_t, el auge puede acabar sin ganancia de productividad. ¿Cómo lo distinguirían en tiempo real y qué dice Acemoglu (2024)? Salvedad empírica: Angeletos, Collard y Dellas (2020) encuentran que el choque que domina el ciclo no se parece a la PTF ni a las noticias sobre ella.

Beaudry y Portier (2006); Fisher (2006); Angeletos, Collard y Dellas (2020); Acemoglu (2024).

Choques a la incertidumbre

La historia económica, desde finales de los años 70, nos muestra la importancia cíclica de la incertidumbre que ocasionan acontecimientos políticos, el precio de los energéticos, el mercado inmobiliario de un país o, recientemente, las guerras comerciales globales. Los macroeconomistas se han esforzado en incorporar la incertidumbre de al menos tres formas distintas. Supongamos un proceso

$$a_{t+1} = \rho_a a_t + e^{v_{t+1}} \epsilon_{t+1}$$

donde $\epsilon_{t+1} \longrightarrow N(0,1)$ y v_t es la log-volatilidad. Podemos modelar cambios en la varianza:

- A través de procesos de volatilidad estocástica (un AR(1) en la log-volatilidad con su propio choque u_t)

$$v_{t+1} = (1-\rho_v)v + \rho_v v_t + (1-\rho_v^2)^{\frac{1}{2}} \eta u_t$$

- A través de procesos de heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizados, escritos sobre la desviación estándar condicional $\sigma_t \equiv e^{v_t}$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega_\sigma + \alpha_\sigma \left(\sigma_t \epsilon_t\right)^2 + \beta_\sigma \sigma_t^2$$

- A través de cambios de régimen discretos, gobernados por una cadena de Markov y que no vamos a tratar en este curso

El RBC con volatilidad estocástica: la incertidumbre como choque propio

Vamos a estudiar este tipo de procesos en un modelo relativamente sencillo:

$$\max_{c_t, l_t, k_t} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \mu \frac{(1-l_t)^{1-\nu}}{1-\nu} \right] \right\}$$

sujeto a la restricción:

$$c_t + (1+g)k_t - (1-\delta)k_{t-1} = e^{a_t} k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

donde:

$$a_{t+1} = \rho_a a_t + e^{v_{t+1}} \epsilon_{t+1}$$

donde ϵ_{t+1} es i.i.d. $N(0,1)$ y la log-volatilidad v_{t+1} sigue

$$v_{t+1} = (1-\rho_v)v + \rho_v v_t + (1-\rho_v^2)^{\frac{1}{2}} \eta u_t$$

con u_t i.i.d. $N(0,1)$: el logaritmo de la productividad pasa a ser un proceso de **volatilidad estocástica**, con la log-volatilidad en su propio AR(1) y su propio choque.

- Estos modelos piden aproximaciones de tercer orden para capturar el efecto de la **prudencia** sobre consumo, inversión y trabajo
- En un modelo no lineal la respuesta depende del estado: se reporta la **GIRF** de Koop, Pesaran y Potter (1996), $\mathrm{GIRF}_h = E\left[y_{t+h} \mid \text{choque, estado}\right] - E\left[y_{t+h} \mid \text{estado}\right]$
- El efecto teórico de la incertidumbre no está claro: operan varios mecanismos a la vez

Tres mecanismos, signos opuestos: prudencia, Oi–Hartman–Abel y opciones reales

- La **prudencia** de los hogares ($u''' > 0$): por Jensen, más incertidumbre eleva la utilidad marginal esperada del consumo futuro $E_t\left[u'(c_{t+1})\right]$ e induce ahorro precautorio que deprime el consumo presente. La aversión al riesgo no basta: la utilidad cuadrática es aversa al riesgo pero, con $u''' = 0$, no genera ahorro precautorio (la desigualdad de Jensen sobre u' lo muestra gráficamente)

- El efecto **Oi–Hartman–Abel**: si los factores pueden ajustarse una vez observado el choque, el beneficio es convexo en el choque y, por Jensen, más incertidumbre **eleva** el beneficio esperado — la incertidumbre puede ser expansiva; su magnitud depende del grado de rendimientos decrecientes a escala

- Las **opciones reales** (*wait-and-see*): con inversión irreversible o costos de ajuste no convexos, esperar tiene valor — más incertidumbre deprime inversión y contratación (Bernanke, 1983; es el canal por el que apuesta Bloom, 2009); las fricciones financieras (restricciones de liquidez, requerimientos de capital) refuerzan este signo contractivo

Tres canales de incertidumbre: ¿qué signo esperan?

Canal	Condición que lo activa	Predicción parcial
Precaución	$u^{(3)} > 0$ y riesgo no asegurable	Menos consumo hoy
Oi–Hartman–Abel	Beneficio convexo en el choque	Mayor beneficio esperado
Opción de esperar	Irreversibilidad o costo fijo	Menos inversión hoy

Ejercicio: un aumento de riesgo reduce consumo e inversión en los datos. ¿Basta la prudencia para reproducir ambos signos? Escriban qué margen adicional necesitan y qué dato lo respaldaría.

La geometría de Jensen está en A3. Aquí importa cómo se combinan las respuestas en equilibrio general. Kimball (1990); Bloom (2009).

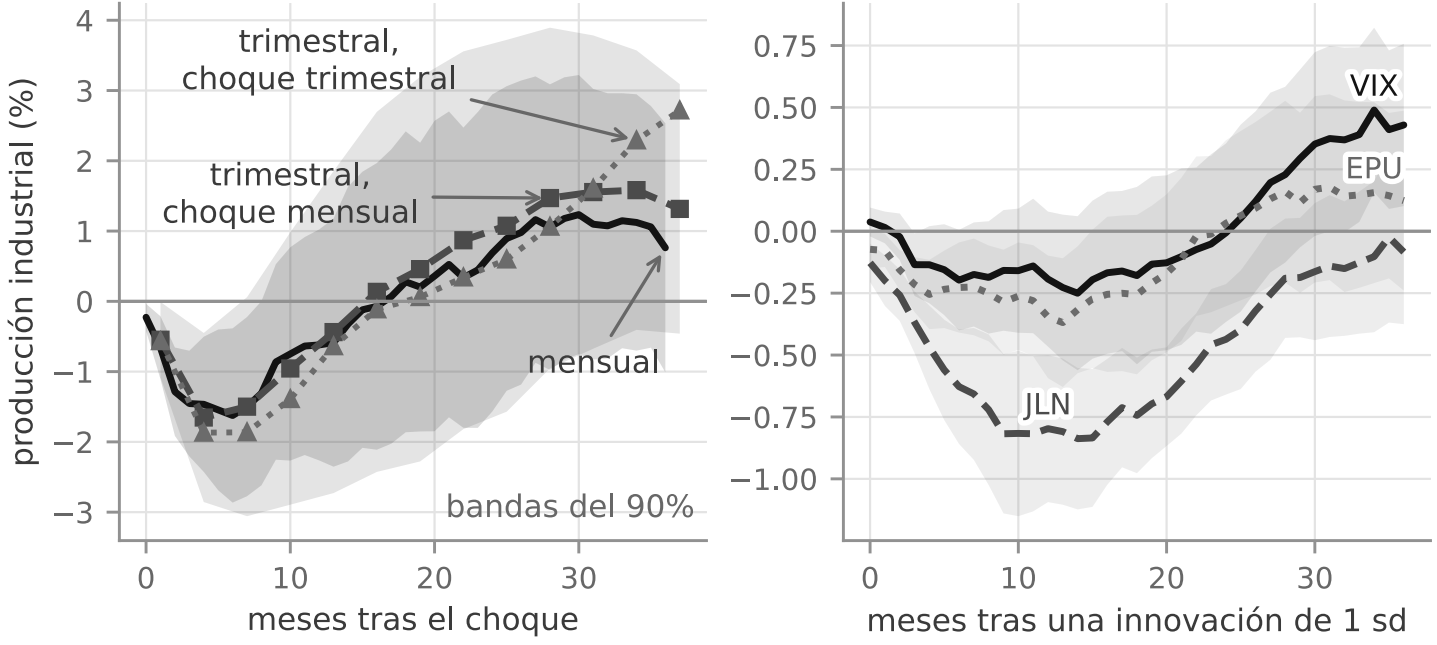
Bloom (2009) contra el RBC con volatilidad estocástica

Acabamos de admitir que el modelo “carece de elementos esenciales” para que la incertidumbre importe. Midamos cuánto: en los datos, un choque de incertidumbre hunde la producción industrial, con un rebote posterior que depende de la medida.

```
from puremacro.lp import lp_hac
import numpy as np, pandas as pd
from pathlib import Path;  DATA = Path('data_curso')   # el bundle de las lecciones
fred = lambda s: pd.read_csv(DATA/f'{s}.csv', index_col=0, parse_dates=True)[s]
epu = pd.read_csv(DATA/'epu_usa_mensual.csv', index_col='date', parse_dates=True)
m = pd.DataFrame({'ip': 100*np.log(fred('INDPRO')), 'ff': fred('FEDFUNDS'),
                  'infl': 100*np.log(fred('CPIAUCSL')).diff(12),
                  'epu': np.log(epu['epu'])}).loc['1990':'2019']
m['ff_1'], m['infl_1'] = m['ff'].shift(), m['infl'].shift()   # orden recursivo
m = m.dropna()
X = np.column_stack([np.ones(len(m)-6)] + [m['epu'].shift(k)[6:] for k in range(1, 7)])
e = m['epu'][6:] - X @ np.linalg.lstsq(X, m['epu'][6:], rcond=None)[0]  # AR(6)
m['sh'] = e / e.std()                                  # la innovacion, en d.e.
irf = lp_hac(m.dropna(), y='ip', x='sh', horizons=range(37), n_lags=6,
             controls=['ff_1', 'infl_1'])
print(irf.loc[[13, 31], 'beta'].round(2))         # -0.37 en h=13, +0.18 en h=31
```

`lp_hac` es por ahora una receta — la teoría de proyecciones locales llega en el bloque econométrico del curso.

Los datos: la producción industrial ante un choque de incertidumbre



EUA, 1990–2019, mensual: proyecciones locales de Jordà de la producción industrial sobre la innovación de cada medida, con bandas al 90 %. Izquierda, la misma respuesta medida a frecuencia mensual y trimestral; derecha, tres medidas. El EPU —el de la receta— toca -0.37 en el mes 13 y rebota a $+0.18$ en el 31 con una banda que cruza el cero: el rebote **no** es significativo. El JLN cae -0.84 y no rebota.

Modelo y datos: primero hagan comparables los experimentos

	Proyección local	RBC no lineal
Innovación	Medida de incertidumbre depurada	Log-volatilidad del proceso de productividad
Resultado	Producción industrial	Producto del modelo
Unidad del impulso	Depende de la normalización empírica	Cambio declarado de volatilidad
Interpretación	Causal bajo supuestos de identificación	Contrafactual dentro de la calibración

La GIRF de A3 es pequeña. Antes de comparar magnitudes, alineen el impulso, la frecuencia y el resultado observado. Un signo parecido no vuelve equivalentes dos experimentos.

Bloom (2009) contra el RBC: el veredicto

Las láminas anteriores comparan dos experimentos relacionados, con distintos observables y normalizaciones. Comparen la respuesta del modelo ante un choque a la log-volatilidad v_t (RBC no lineal resuelto por iteración global de la función de política, con el AR(1) de v_t discretizado en dos estados; es la GIRF de Koop–Pesaran–Potter que definimos arriba, no una IRF lineal — en Dynare el mismo experimento exigiría `order=3`): el efecto es minúsculo frente al patrón empírico — exactamente los elementos ausentes (costos de ajuste, utilización variable, fricciones financieras) son los que pueden amplificar su efecto económico. Esto no elimina la certeza equivalente de una solución lineal. El ejemplo `puremacro.examples.bloom2009` del paquete es un ejercicio hermano (VAR con Cholesky sobre datos trimestrales, que lee un panel que no viaja con el curso), no una réplica.

Bloom (2009); Fernández-Villaverde, Guerrón-Quintana, Rubio-Ramírez y Uribe (2011); Baker, Bloom y Davis (2016); Basu y Bundick (2017).

Una economía con fricciones detalladas tiene un gemelo neoclásico con cuñas

Chari, Kehoe y McGrattan (2007) demuestran **equivalencia** para una lista corta y explícita de fricciones: dada una de esas economías detalladas, construyen un **prototipo** —el modelo neoclásico ya derivado, con cuatro cuñas que varían en el tiempo— cuyas asignaciones coinciden con las de ella. La fricción se lee en el precio o la restricción que distorsiona.

Las cuatro equivalencias efectivamente demostradas

- **Eficiencia** A_t: financiamiento de insumos —la empresa pide prestado para pagar insumos intermedios y el costo del crédito entra como pérdida de eficiencia
- **Trabajo** $1 - \tau_{\ell,t}$: salarios rígidos con choques monetarios, y poder monopólico de un sindicato sobre el salario
- **Inversión** $1 + \tau_{x,t}$: fricciones de financiamiento de la inversión con costos de verificación del estado
- **Gasto** g_t: economía abierta —las exportaciones netas, junto con las compras públicas

Lo demás que suele leerse en las cuñas es analogía, no teorema: la mala asignación entre unidades heterogéneas se lee en A_t (Restuccia y Rogerson; Hsieh y Klenow) y las fricciones de búsqueda y emparejamiento en $1 - \tau_{\ell,t}$ (Shimer), pero ninguna viene con equivalencia probada en el artículo. El mapa es de muchos a uno: la cuña que se mueve **nombra una familia** de modelos; no elige uno dentro de ella.

Chari, Kehoe y McGrattan (2007); Carlstrom y Fuerst (1997); Bernanke, Gertler y Gilchrist (1999); Cole y Ohanian (2004); Restuccia y Rogerson (2008); Hsieh y Klenow (2009); Shimer (2009); Brinca, Chari, Kehoe y McGrattan (2016).

Las cuatro cuñas entran una por ecuación, en las condiciones ya derivadas

El hogar descentralizado resuelve el problema de siempre con dos precios distorsionados: el salario neto $(1-\tau_{\ell,t})w_t$ y el costo de la inversión $(1+\tau_{x,t})$,

$$c_t + (1+\tau_{x,t})\left[(1+g)k_t - (1-\delta)k_{t-1}\right] = (1-\tau_{\ell,t})w_t l_t + r_t k_{t-1} + T_t$$

con $w_t = (1-\alpha)e^{a_t}k_{t-1}^{\alpha}l_t^{-\alpha}$ y $r_t = \alpha e^{a_t}k_{t-1}^{\alpha-1}l_t^{1-\alpha}$. El cociente de las condiciones de primer orden en c_t y l_t da la **intratemporal**; la condición en k_t, la **Euler**:

$$\mu(1-l_t^*)^{-\nu}c_t^* = (1-\tau_{\ell,t})(1-\alpha)e^{a_t}(k_{t-1}^*)^{\alpha}(l_t^*)^{-\alpha}$$

$$E_t\left\{\left[\alpha e^{a_{t+1}}(k_t^*)^{\alpha-1}(l_{t+1}^*)^{1-\alpha} + (1-\delta)(1+\tau_{x,t+1})\right]\frac{\beta c_t^*}{c_{t+1}^*}\right\} = (1+\tilde{g})(1+\tau_{x,t})$$

$$c_t^* + (1+g)k_t^* - (1-\delta)k_{t-1}^* + g_t = e^{a_t}(k_{t-1}^*)^{\alpha}(l_t^*)^{1-\alpha}$$

Con $\tau_{\ell,t} = \tau_{x,t} = g_t = 0$ se recuperan exactamente las tres condiciones de equilibrio del modelo deflactado. La cuña de eficiencia es e^{a_t}, ahora sin imponerle un AR(1).

Notación: $(1+g)$ es el factor de crecimiento de la senda balanceada y $(1+\tilde{g}) = (1+g)/(1+\hat{N})$ su versión por habitante; g_t, con subíndice temporal, es la cuña de gasto: un nivel ($g_t = y_t - c_t - x_t$), a diferencia del g_t del bloque fiscal, que es una participación del PIB. $\tau_{\ell,t}$ distorsiona solo el margen trabajo–ocio, mientras que el τ_t del bloque fiscal grava por igual a los dos factores.

Las cuñas se despejan como residuos; solo una necesita un pronóstico

Dados $\alpha, \delta, \beta, \nu, \mu$, una serie de capital por inventario permanente y los datos $\{y_t, c_t, x_t, l_t\}$, tres cuñas salen despejando directamente:

$$A_t = \frac{y_t}{k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}}, \qquad 1 - \tau_{\ell,t} = \frac{\mu(1-l_t)^{-\nu} c_t \, l_t}{(1-\alpha) y_t}, \qquad g_t = y_t - c_t - x_t$$

La segunda es el cociente entre la relación marginal de sustitución ocio–consumo y el producto marginal del trabajo $(1-\alpha)y_t/l_t$: mide cuánto se aparta el dato de la igualdad que el modelo impone. Su forma depende de las preferencias: con desutilidad del trabajo $\psi \, l_t^{1+\nu}/(1+\nu)$ en vez de curvatura del ocio, el numerador cambia y el número medido también.

La cuña de inversión es la única que vive dentro de una esperanza condicional. Chari, Kehoe y McGrattan tratan al vector $s_t = (\log A_t, \ \tau_{\ell,t}, \ \tau_{x,t}, \ \log g_t)$ como un VAR(1), $s_{t+1} = P s_t + Q \varepsilon_{t+1}$, estimado por máxima verosimilitud junto con el prototipo; con P y Q en la mano, E_t queda determinada y $\tau_{x,t}$ se despeja de la Euler.

> **Advertencia**: por construcción las cuatro cuñas reproducen los datos **exactamente**. Que el prototipo "ajuste" no es evidencia a favor de nada; el contenido está en el reparto, no en el ajuste.

Mini-ejercicio: ¿qué le pasa a la A_t medida si la utilización del capital es variable y no se observa? ¿Y a $1 - \tau_{\ell,t}$ si el ajuste del empleo es extensivo pero l_t solo recoge horas por trabajador?

Una cuña a la vez: el experimento reparte el ciclo, no lo explica

El experimento central alimenta al prototipo con **una** cuña medida y deja a las otras tres en su valor de la senda balanceada, manteniendo las expectativas gobernadas por el mismo P. La serie simulada se compara con el dato.

- Resultado canónico para la Gran Depresión y la recesión de 1982 en EUA: las cuñas de **eficiencia** y de **trabajo** reproducen casi todo el movimiento del producto; la de **inversión** casi nada, y a veces lo empuja en la dirección equivocada
- Es contabilidad porque el mapa fricción $\rightarrow$ cuña es de muchos a uno: la cuña de trabajo es compatible con impuestos, sindicatos, salarios rígidos o fricciones de emparejamiento, y el ejercicio no puede escoger entre ellos
- Todo lo que el prototipo no tiene (utilización variable, capital humano, error de medición, informalidad) re-aparece disfrazado de cuña: la cuña mide la distancia al modelo, no una fricción de la economía
- Las componentes solo suman en la aproximación lineal; fuera de ella la descomposición no es aditiva y hay que reportar también la simulación con las cuatro cuñas juntas

La lectura honesta: el ejercicio **descarta** familias enteras de modelos. Una cuña de inversión pequeña cuestiona las fricciones que entran por ese margen en el prototipo. No descarta todas las fricciones financieras: algunas aparecen como cuñas de eficiencia o trabajo.

El panel del curso mide las cuñas con dos atajos que hay que declarar

---

Atajo 1, en las preferencias. La fórmula del pizarrón supone $U = \log c_t + \mu(1 - l_t)^{1-\nu}/(1-\nu)$, con ν como curvatura del ocio. El panel usa la forma alternativa $U = c_t^{1-\sigma}/(1-\sigma) - \psi\, l_t^{1+\nu}/(1+\nu)$, con $\sigma = 1$ (aversión al riesgo, no una volatilidad) y $\nu = 2$ como **inversa** de la elasticidad de Frisch. Igualar de nuevo relación marginal de sustitución y producto marginal del trabajo da

$$1 - \tau_{\ell,t} = \frac{\psi\, l_t^{1+\nu} c_t^{\sigma}}{(1-\alpha) y_t}, \qquad \text{con } \psi \text{ calibrada país por país en 2000–2006}$$

Miden la misma distancia, pero **no** dan el mismo número: la columna `tau_stat` del panel es $1/(1-\tau_{\ell,t})$ de esta segunda fórmula, no de la primera.

Atajo 2, en la Euler. El panel no estima P ni Q. Quita E_t —previsión perfecta— e impone $\tau_{x,t+1} = \tau_{x,t}$; despejando de la Euler ya escrita y fijando $(1+\tilde{g}) = 1$,

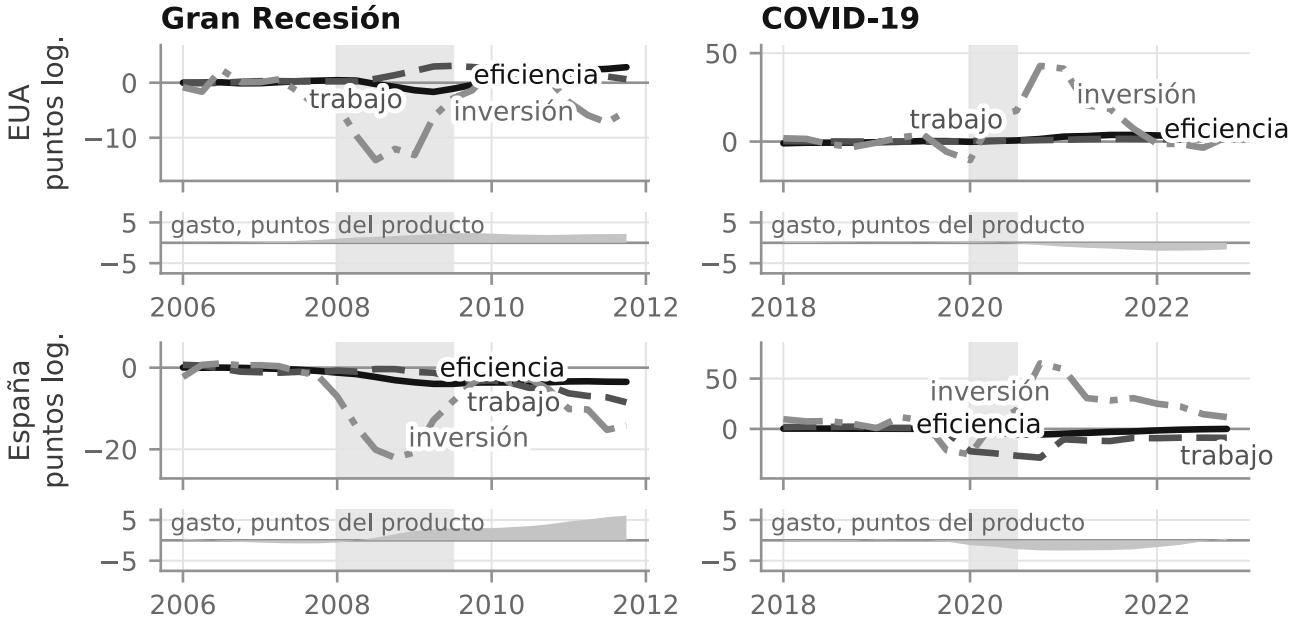
$$\frac{1}{1+\tau_{x,t}} \;\simeq\; \frac{\beta^{-1}(c_{t+1}/c_t) - (1-\delta)}{\alpha\, y_{t+1}/k_t}, \qquad \text{normalizada a media } 1 \text{ en 2000–2006}$$

Es un residuo de Euler ex post, no la cuña filtrada: hereda entera la sorpresa de c_{t+1}. Ancla: en EUA, 2000–2019, su desviación estándar es de **6.7** puntos logarítmicos, contra 4.4 de la cuña de eficiencia y 1.4 de la de trabajo; por eso se lee con una media móvil de cuatro trimestres.

Pregunta: si el consumo cae por confinamiento y no por la tasa de interés, ¿de qué signo es el error que este atajo mete en $\tau_{x,2020}$, y lo corregiría estimar P y Q?

En 2008–09 se mueve la Euler; en 2020, la intratemporal española

La cuña de gasto es la callada: 6 puntos del producto en el peor caso



En 2008–09 la cuña de inversión cae 14 puntos logarítmicos en EUA y 22 en España, y la de eficiencia 1.7 y 4.0. En 2020 se invierte: la cuña de trabajo española se desploma 29 y la de inversión salta 65. La franja baja es la cuña de gasto. Los tamaños **no** son comparables entre cuñas: cada una entra en una ecuación distinta.

Laboratorio: midan las cuñas de su país y digan qué familia acusan

Python (puremacro) — las tres cuñas, puestas en una orientación común (caer = frenar)

```
import pandas as pd
from pathlib import Path;  DATA = Path('data_curso')   # el bundle de las lecciones
# el panel congelado del Modulo 4b: 6 paises (CAN DEU ESP GBR KOR USA),
# subconjunto del panel de investigacion de 33 economias de la OCDE
cu = pd.read_csv(DATA / 'wedges_bca_curso.csv', parse_dates=['date'])
u = cu[cu['code'] == 'USA'].sort_values('date').set_index('date')
w = pd.DataFrame({'cunaA':  100*u['logA'],   # eficiencia, 100*log A
                  'cunaL': -100*u['logS'],   # trabajo,    100*log(1-tau_l)
                  'cunaX':  100*u['logD']})  # inversion, -100*log(1+tau_x)
s = w.rolling(4, center=True, min_periods=2).mean()  # la Euler es ruidosa
print((s.loc['2006':'2011'] - s.loc['2006'].mean()).min().round(1))
# EUA -> cunaA -1.7, cunaL -0.1, cunaX -14.1   (ESP: -4.0, -8.5, -22.0)
```

Elijan uno de los seis países del panel (CAN, DEU, ESP, GBR, KOR, USA) y un episodio, midan la caída de cada cuña frente a su base y contesten: ¿qué familia de modelos acusa ese episodio? Trampa deliberada: el salto de la cuña de inversión en 2020 hereda el desplome del consumo, que entra en el residuo de la Euler. ¿Fricción financiera, o una Euler que no gobernó al consumo confinado?

Las mismas cuñas, medidas: contabilidad del ciclo en Python

Python (puremacro) — las cuatro cuñas, despejadas de las condiciones ya derivadas

```
import pandas as pd
from pathlib import Path;  DATA = Path('data_curso')  # el bundle de las lecciones
DELTA = 0.015   # depreciacion trimestral (0.059 anual), comun a todo el panel
# el panel de investigacion: 33 economias de la OCDE, 2000T1-2025T2; alpha_c
# y beta_c vienen calibrados pais por pais en el panel; DELTA es comun
cu = pd.read_csv(DATA / 'wedges_panel_BGP_clean_nu2.csv',
                 parse_dates=['qdate'], date_format='%d-%b-%Y')  # 01-Jan-2000
u = cu[cu['code'] == 'USA'].set_index('qdate').loc['2000':'2019']
A = u.Y / (u.K**u.alpha_c * u.H**(1 - u.alpha_c))    # eficiencia
S = u.tau_stat                                       # trabajo: 1/(1 - tau_l)
G = u.Y - u.C - u.I                                  # absorcion residual
D = ((u.C.shift(-1)/u.C)/u.beta_c - (1 - DELTA)) / ( # inversion: residuo de
     u.alpha_c * u.Y.shift(-1) / u.K)                # la Euler, ex post
```

La cuña $G = Y - C - I$ es absorción residual, no gasto público observado: puede incluir exportaciones netas y discrepancias de agregación. Las series de volumen encadenado no son aditivas. El experimento del cuaderno trata este residuo como cierre del prototipo; esa decisión debe declararse.

Cuaderno acompañante: `T04_C_business_cycle_accounting` (medición de las cuatro cuñas sobre el panel de 33 economías y el experimento de una cuña a la vez; no es una réplica de Chari, Kehoe y McGrattan 2007).

Las cuñas son un diagnóstico, no una explicación

- **Christiano y Davis (2006)**: la lectura de las cuñas no es robusta a dos decisiones que parecen inocuas. Primera, cómo se representa la fricción dentro del prototipo —la misma fricción financiera acaba en la cuña de inversión o dentro de la ecuación de acumulación de capital según cómo se escriba, y el veredicto cambia con ella. Segunda, cómo se especifica y estima el proceso conjunto de las cuñas: las restricciones sobre P y Q afectan al reparto

- La equivalencia va en una dirección cómoda: **dado** un modelo detallado se construye su prototipo, pero de la cuña medida no se recupera el modelo. Diagnóstico, no explicación

- El puente natural es escribir la fricción de forma explícita y dejar que los datos la disciplinen: verosimilitud por filtro de Kalman, priors y MCMC sobre el modelo estructural, en vez de residuos sobre el prototipo

La pregunta que ordena todo el bloque —qué choque o qué fricción importa— se contesta primero con cuñas, que descartan familias, y después con estimación, que pone números a la familia superviviente.

Chari, Kehoe y McGrattan (2007); Christiano y Davis (2006); Brinca, Chari, Kehoe y McGrattan (2016); Smets y Wouters (2007).

Qué debe salir de aquí para el parcial

- **La tabla de momentos**: volatilidades relativas y correlaciones con el PIB, y cómo cambian por regímenes — es la vara contra la que se mide cualquier modelo del ciclo
- **El mecanismo de suavizamiento intertemporal del consumo**: por qué el RBC entrega $\sigma_c/\sigma_y < 1$, por qué el suyo (≈ 0.33) queda muy por debajo tanto de EUA (0.79) como de México (0.96), y por qué el fallo es de magnitud y no de signo — con la ficha de medición que hace comparables esas tres cifras
- **El signo de las horas**: el modelo las sube tras un choque tecnológico y Galí (1999) las baja — con la sensibilidad a ν y el trabajo indivisible de Hansen–Rogerson como piezas del veredicto
- **La taxonomía de choques**: neutrales (a_t), específicos a la inversión (q_t), fiscales (τ_t, g_t), de demanda (ζ_t, θ_t) e incertidumbre (v_t) — y qué observable distingue a cada uno
- **Las cuatro cuñas**: dónde entra cada una en las condiciones de equilibrio, cómo se despeja como residuo y por qué el reparto entre cuñas descarta familias de modelos pero no identifica una fricción

Apéndice

Material de apoyo: la galería histórica del ciclo y la receta del acertijo de Slutsky,
el modelo con choques de demanda, la motivación y el cierre presupuestario del bloque fiscal,
las IRFs con cuatro choques y las sensibilidades completas por parámetro.

Apéndice (lectura): el ciclo en cinco nombres, 1862–1933

- Clément Juglar (1862) es la primera persona en observar un patrón de **prosperidad** → **crisis** → **liquidación** y observa una duración promedio de 7 a 11 años, atribuyendo ese patrón al sistema de crédito
- William Stanley Jevons (1875) atribuye el patrón cíclico de actividad económica a las manchas solares (que se intensifican cada 11 años) y su impacto sobre la producción agrícola
- Nikolái Kondrátiev (1925) argumenta que existen ciclos de 60 años, asociados a grandes cambios tecnológicos, idea que también es barajada por Joseph Schumpeter. Kondrátiev fue ejecutado por sus ideas en 1938, ya que contradecían la visión marxista del ciclo
- Eugene Slutsky (1927) y Ragnar Frisch (1933) presentan una visión moderna del ciclo como un conjunto de **choques** y **mecanismos de transmisión**, donde el ciclo puede descomponerse matemáticamente como la suma de choques aleatorios
- Wesley Mitchell (1913, 1927) y el National Bureau of Economic Research (NBER) establecen una metodología y un comité para determinar cuándo empiezan y terminan las recesiones

Apéndice: el acertijo de Slutsky, en ocho líneas

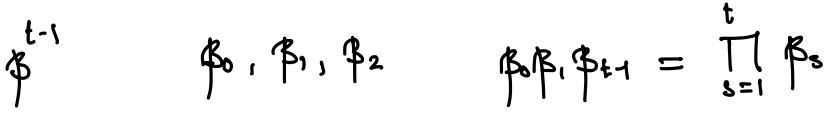
```
# Actualizacion en linea: requiere red; registra la anada.
from puremacro import fetch, cycles, data
import numpy as np

y = 100*np.log(fetch.fetch_fred('GDPC1'))
ciclo, _ = cycles.hamilton_filter(y, h=8, p=4)   # el dato (ciclo, tendencia)
ruido = np.convolve(np.random.randn(len(y)), np.ones(8)/8, 'valid')
ruido *= np.nanstd(ciclo) / ruido.std()          # la ilusion, REESCALADA
# alternativa bilateral: data.hp_filter(y, 1600)
```

El reescalado de la última línea no es cosmético: sin él la media móvil tiene una desviación estándar de $\sim$0.34 contra los $\sim$3.2 del ciclo de Hamilton (un factor de 9), y el acertijo se resuelve mirando el eje. Y `mode='same'` rellenaría los bordes con ceros, otra pista gratis: por eso `'valid'`.

Pregunta de fondo: ¿qué evidencia distinguiría choques identificables de una ilusión estadística?

Slutsky (1927); Frisch (1933); Cogley y Nason (1995); Hamilton (2018).



Apéndice: el modelo con choques de demanda

Aumentamos el modelo de choques tecnológicos con dos tipos de choques de demanda: choques al descuento intertemporal del consumo ζ_t y a la demanda de ocio θ_t

$$\max_{c_t, l_t, k_t} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left(\prod_{s=0}^{t-1} e^{\zeta_s} \right) \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + e^{\theta_t} \frac{(1-l_t)^{1-\nu}}{1-\nu} \right] \right\}$$

sujeto a:

$$c_t + \frac{k_t - (1-\delta)k_{t-1}}{q_t} = e^{a_t} k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

donde

$$a_{t+1} = (1-\rho_a)a + \rho_a a_t + \epsilon_{at+1}$$
$$q_{t+1} = (1-\rho_q)q + \rho_q q_t + \epsilon_{qt+1}$$
$$\zeta_{t+1} = (1-\rho_\zeta)\zeta + \rho_\zeta \zeta_t + \epsilon_{\zeta t+1}$$
$$\theta_{t+1} = (1-\rho_\theta)\theta + \rho_\theta \theta_t + \epsilon_{\theta t+1}$$

En medias, e^{ζ} juega el papel del factor de descuento β y e^{θ} el del peso del ocio μ de la calibración (reservamos β y μ para esos parámetros).

Aquí escribimos q_t en niveles con media $q > 0$ como aproximación local; la versión en logaritmos de la lámina de choques no neutrales es la que garantiza $q_t > 0$ globalmente.

Apéndice: por qué los choques fiscales cambian el modelo

Hemos documentado que los choques a los impuestos y al gasto público son fuentes estructurales de volatilidad y podemos estudiar cómo se transmiten a lo largo del ciclo económico a través del suavizamiento intertemporal del consumo y la sustitución intertemporal del trabajo.

Además, los choques a impuestos y a gastos nos obligan a escribir el modelo de forma descentralizada, ya que no se cumplen los teoremas fundamentales de la economía del bienestar y, sobre todo, nos fuerzan a pensar en cómo caracterizar una tasa marginal en el modelo cuando solo tenemos información sobre las recaudaciones promedio. Nos obligan a pensar en cómo deberíamos introducir el gasto público en las preferencias de los hogares o en la tecnología.

Apéndice: la restricción presupuestaria del gobierno

Siempre que introducimos la actividad del gobierno en modelos **DSGE** tenemos que expresar el equilibrio entre ingreso y gasto.

- Presupuesto balanceado periodo a periodo: requiere introducir Ω_t^* para cubrir la diferencia entre ingresos y gastos

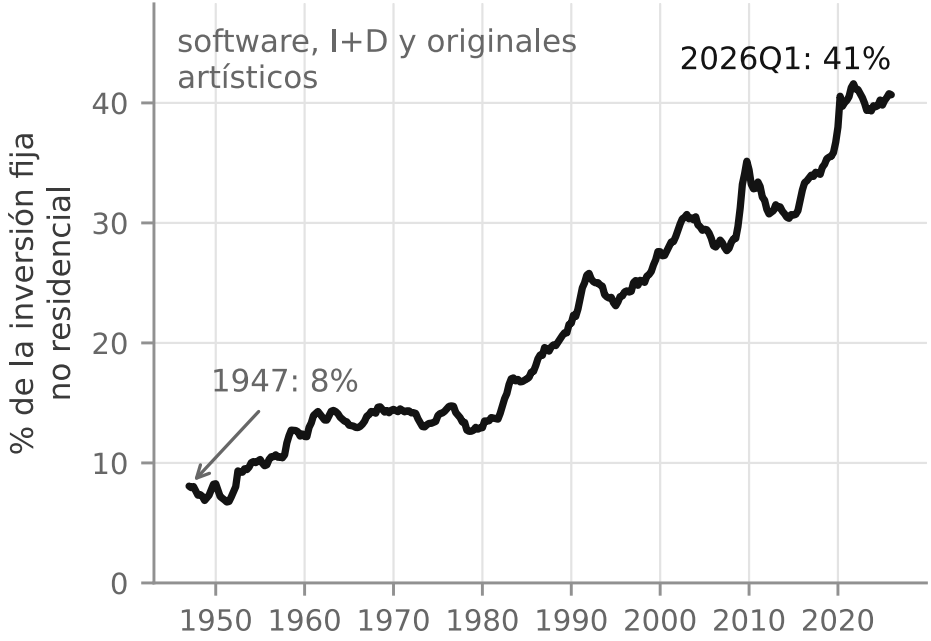
$$\Omega_t^* + g_t y_t = \tau_t y_t$$

- Deuda pública (que puede incluir un Ω_t exógeno): el gobierno recibe b_t al emitir deuda nueva y paga el servicio $(1 + r_{t-1})b_{t-1}$ de la deuda vieja

$$\Omega_t + g_t y_t + (1 + r_{t-1})b_{t-1} = \tau_t y_t + b_t$$

Este último enfoque es particularmente útil si queremos estudiar el efecto sobre la acumulación de deuda de choques tecnológicos y fiscales; solo hay que tener en cuenta que surge una relación de arbitraje entre la rentabilidad esperada de la deuda pública y del capital. Comprueben que, sumando la restricción del hogar (con ingreso factorial $w_t l_t + p_{kt} k_{t-1} = y_t$ y con la transferencia del cierre elegido en el lugar de Ω_t^*) y la del gobierno, se recupera la restricción de recursos de la economía.

Apéndice: la inversión que se vuelve intangible

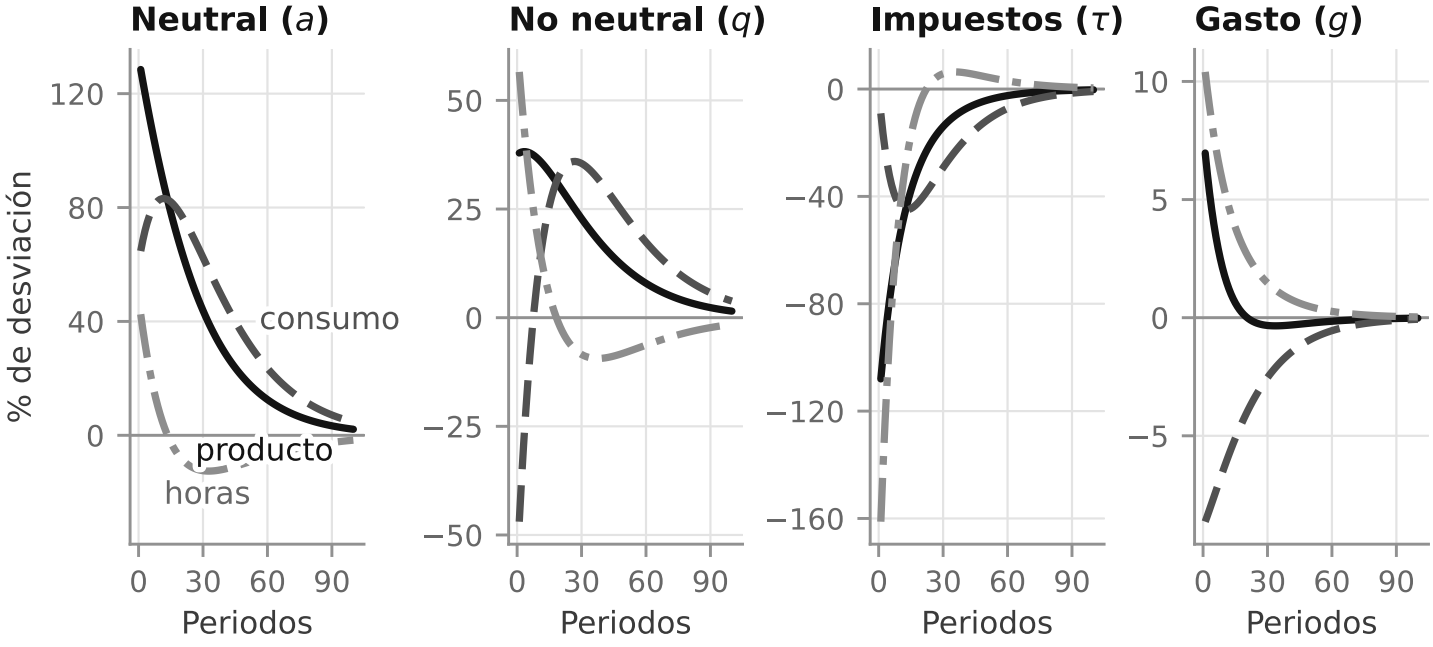


Dos de cada cinco dólares del capital que compra hoy una empresa estadounidense —el $41\,\%$ de la inversión fija no residencial en 2026Q1, contra el $8\,\%$ de 1947— van a software, investigación y desarrollo y originales artísticos. El máximo fue el $41.6\,\%$ de 2021Q4. Ojo con la añada: la figura usa la serie congelada del curso; con los datos revisados que hoy da FRED, 2026Q1 baja a $39.9\,\%$, empatada con el equipo ($40\,\%$) y al doble de las estructuras ($20\,\%$), y en 2026Q2 el equipo ya la rebasa ($40.6\,\%$ contra $39.7\,\%$). No es la mayor parte del total, pero ya pesa lo mismo que el equipo.

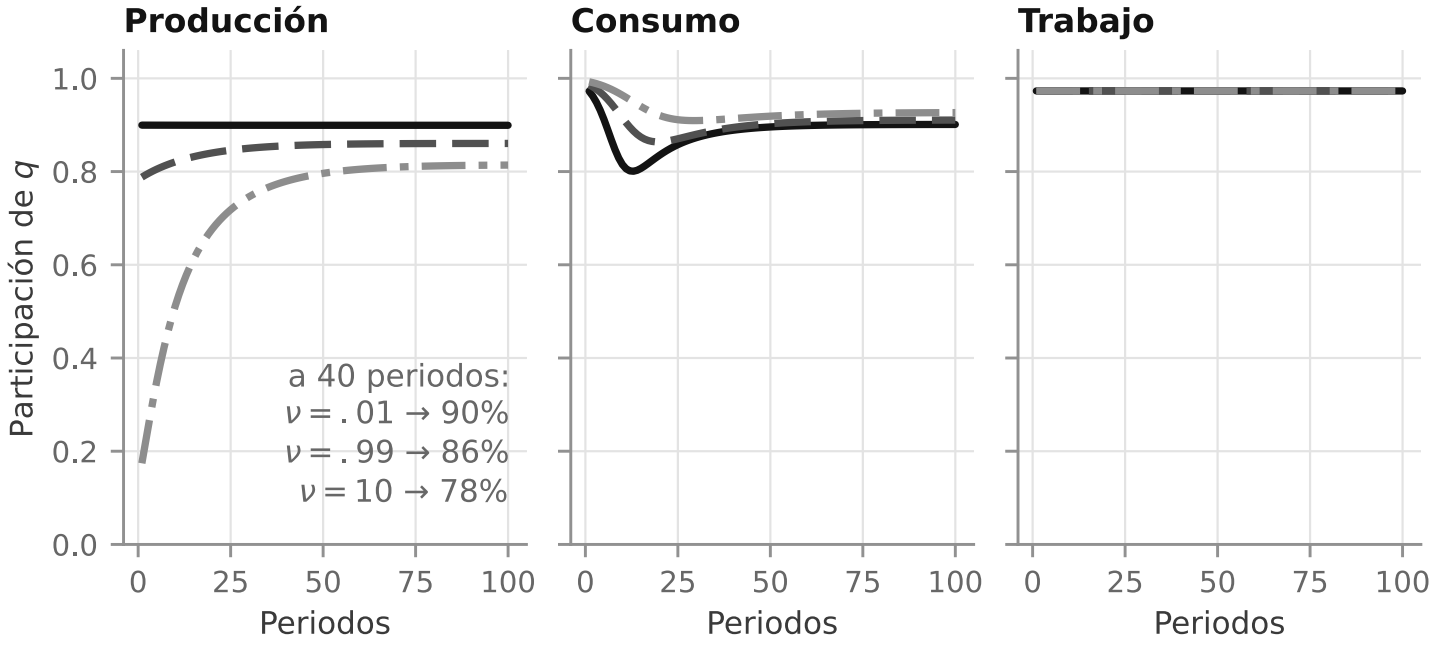
Pregunta para el modelo ya escrito: si buena parte de la inversión es intangible y se deprecia rápido, ¿qué le pasa a δ y al acervo k_t que se mide por inventario permanente, y en qué dirección se sesga la cuña de eficiencia?

Apéndice: las IRFs con cuatro choques

Esta versión del modelo, resuelta en Dynare con impuestos del 30 % y gasto público del 20 % del PIB:



Apéndice: sensibilidad a ν — descomposición de la varianza



El efecto de un cambio en ν es importante en las funciones de impulso respuesta, pero modesto en la descomposición de la varianza.

Apéndice: sensibilidad a σ_q — funciones de impulso respuesta

Al revés que con ν: a primer orden —Klein— las IRFs no se mueven; las tres coinciden.

