Riesgo e incertidumbre

Macroeconomía avanzada

ITAM, Otoño 2026

Semana 5

Introducción

CHOQUES + Mecanismos de transmisión

El marco de análisis neoclásico es coherente con los hechos estilizados que se derivan del análisis a largo plazo de la contabilidad nacional. La teoría de ciclos reales incorpora choques aleatorios estructurales a parámetros tecnológicos, fiscales o de preferencias como factores causantes de las fluctuaciones. Estudiar el papel del riesgo que introducen esos choques exige un marco analítico propio: estados de la naturaleza, mercados contingentes y reparto eficiente del riesgo.

Keynesianos : Animal Spirits

- Comenzamos introduciendo la noción de estados de la naturaleza y su distribución, y cómo la productividad total de los factores puede definirse como un conjunto de estados de la naturaleza con cierta probabilidad
- Extenderemos el concepto de estado de la naturaleza en un contexto dinámico, estudiaremos cómo definir el equilibrio competitivo y cómo corresponde a la asignación de un planificador social
- Terminaremos aplicando esos conceptos a una economía donde el riesgo se origina en el comportamiento aleatorio de la productividad total de los factores

SMALL WORLDS

Productividad es estacionaria frente a una tendencia

$$a_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \rho a_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$\varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad |\rho| < 1$$

Tres termómetros de $\pi(s)$

Ciclos basados en incertidumbre

Antes de formalizar $\pi(s)$, veámosla en los datos. Tres medidas de incertidumbre normalizadas:

- **JLN** (macro): imprevisibilidad pura en 132 series mensuales, desde 1960. → GARCH
- **EPU** (política económica): textual en prensa, desde 1985.
- **VIX**: volatilidad financiera neutral al riesgo, desde 1990.

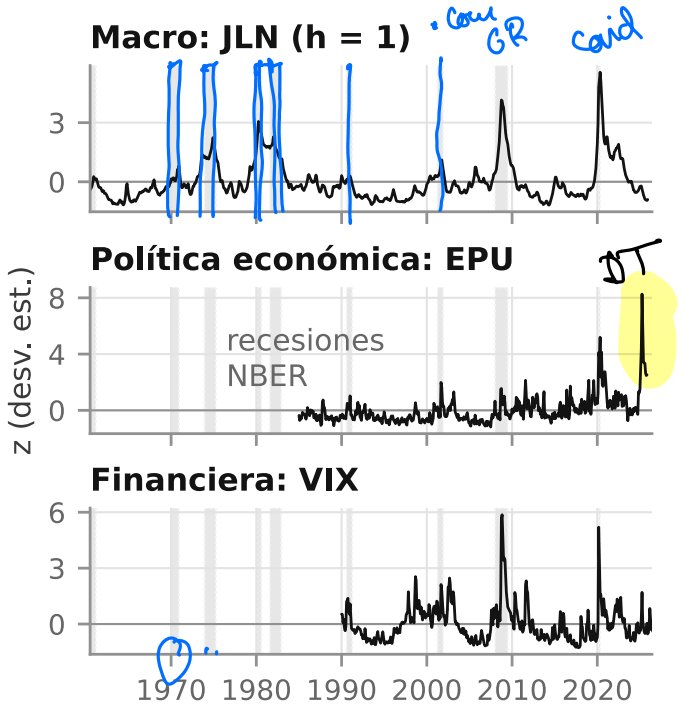
Las tres se disparan en 2008 y 2020; la JLN también en 1980–82. Pero **no siempre juntas**: el EPU salta con elecciones o el Brexit sin que la JLN se mueva.

Python (puremacro) — puremacro.fetch

```
from puremacro import fetch
from puremacro.fetch import epu, jln
jln_u = jln.fetch()                # macro (JLN)
epu_u = epu.fetch()                # politica (EPU)
vix   = fetch.fetch_fred('VIXCLS') # activos
```

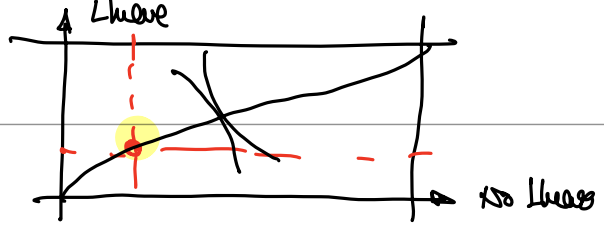
Pregunta abierta: ¿la incertidumbre *causa* las recesiones o al revés? Queda abierta hasta tener herramientas de identificación.

Machine learning + Text analysis



(Bloom 2009; Jurado, Ludvigson y Ng 2015; Baker, Bloom y Davis 2016) | T03_D construye un EPU propio desde texto.

Estados de la naturaleza



Riesgo : crecimiento perfecto de TT

Supongamos una economía poblada por $I > 1$ hogares que son propietarios de una dotación $y_i(s)$, donde $s \in \mathcal{S}$ es la realización de un estado de la naturaleza, con una distribución de probabilidad bien definida $\pi(s)$, tal que

Perfect foresight ⇒ Rational expectations

$$\int_{\mathcal{S}} \pi(ds) = 1.$$

Típicamente asumimos que tiene un soporte discreto porque, en la práctica, resolvemos la mayoría de estos modelos numéricamente, por lo tanto $\mathcal{S} = \{1, \ldots, S\}$, con probabilidades $\pi(s) \in (0, 1)$ tales que:

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \pi(s) = 1.$$

La teoría de ciclos reales postula que la productividad total de los factores es la que determina el estado de la naturaleza en el que se encuentra una economía: recesión, expansión, etcétera. Vamos a mostrar cómo la productividad se comporta como un proceso aleatorio estable.

$\pi(s)$ estimada: Growth-at-Risk

$\pi(s)$ no es un objeto abstracto: puede estimarse. Adrian, Boyarchenko y Giannone (2019) estiman los **cuantiles** del crecimiento del PIB condicionales al estrés financiero (NFCI):

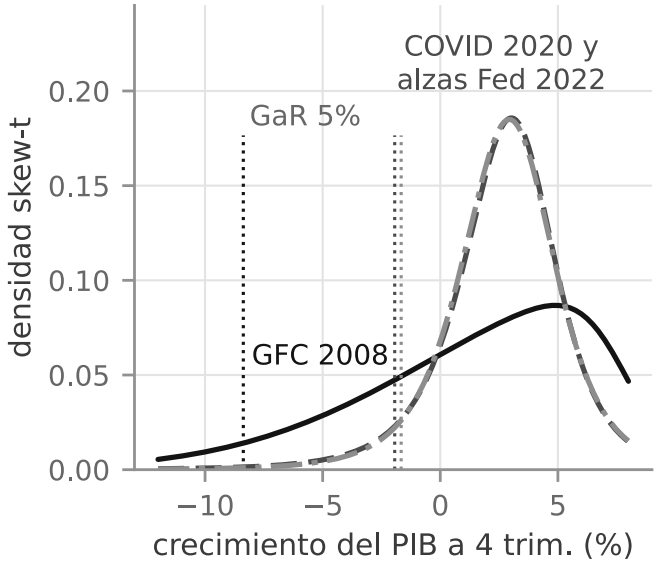
$$Q_{y_{t+h}}(\tau \mid \mathcal{F}_t) = \alpha(\tau) + \beta(\tau) y_t + \gamma(\tau)\text{NFCI}_t.$$

Ajustando los cuantiles a la densidad skew-t de Azzalini, recuperan la **distribución condicional completa**:

Python (puremacro) — puremacro.gar (T03_C)

```
from puremacro import fetch, gar
y      = fetch.fetch_fred('A191RL1Q225SBEA')
nfci_q = fetch.fetch_fred('NFCI').resample('QS').mean()
idx = y.index.intersection(nfci_q.index)
res = gar.qar(y.loc[idx], quantiles=(0.05, 0.25, 0.50, 0.75, 0.95),
              horizons=(1, 4), p=4, controls=nfci_q.loc[idx])
h4  = res[res.h == 4]
st  = gar.fit_skewt_to_quantiles(dict(zip(h4.tau, h4.q_pred)))
```

Remate: cada curva **es** $\pi(s)$: el NFCI del pico de 2008 ($+2.77$) empuja masa a la cola izquierda —GaR 5 % de -8.4 %, frente a -1.9 % en 2020 y -1.7 % en 2022, a cuatro trimestres— y la derecha apenas se mueve.



Puente operativo

¿Conviene un $\mathcal{S}$ discreto o continuo? Para resolver modelos dinámicos cuantitativos, la respuesta operativa es la discretización (Tauchen / Rouwenhorst).

(Adrian, Boyarchenko y Giannone 2019) | Companion: `T03_C_growth_at_risk`, celda 22 (1971Q1–2026Q1, $n = 221$).

Distribución estacionaria de productividad

Prescott Kydland (1982) $|\rho_a| < 1$ $\sigma_{t+1}^2 = \omega + \rho_\sigma \sigma_t^2 + \sigma_{t+1}$

La literatura de ciclos económicos reales le da una interpretación causal a la productividad y suele estimar sus choques estructurales ϵ_{at+1} como residuo de

$$a_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \rho_a a_t + \epsilon_{at+1}$$

$+ \sigma_t \varepsilon_{at+1}$ ← Choque exógeno a la productividad o innovación

donde a_t es el logaritmo de la productividad total de los factores, medida usando técnicas de contabilidad de crecimiento, y $\epsilon_{at+1} \sim N(0, \sigma_a^2)$. Este proceso generador de datos (**PGD**) no tiene por qué ser "verdadero":

- a_t no tiene por qué ser estacionario en torno a una tendencia
- El uso variable del capital puede hacer que ρ_a esté sesgado
- ϵ_{at+1} no tiene por qué ser homocedástico

$\frac{P_{et}}{P_{ct}} \propto \frac{1}{q_t}$

$\log(q_{t+e}) = \rho_q \log(q_t)$

Reestimar el PGD con la TFP de Fernald

Estimamos el PGD con la TFP trimestral de Fernald, dos veces: con la serie **cruda** (dtfp) y con la **ajustada por utilización** (dtfp_util).

```
import pandas as pd
from puremacro import volatility
url = 'https://www.frbsf.org/wp-content/uploads/quarterly_tfp.xlsx'
tfp = pd.read_excel(url, sheet_name='quarterly', header=1)
# columnas dtfp (cruda) y dtfp_util (ajustada): acumular a niveles a_t
# MCO: a[t+1] ~ 1 + t + t**2 + a[t]  ->  (rho_a, sigma_a) y residuos res
# [esquematico: el MCO que define res esta completo en figuras_curso.py]
volatility.arch_lm_test(res)        # ARCH-LM sobre los residuos
volatility.ljung_box_squared(res)   # Ljung-Box sobre eps^2
# alternativa minima: from puremacro.fetch import fernald ->
# fernald.fetch() (solo dtfp_util; para el contraste con la
# dtfp cruda, citar los rho del paper)
```

Los $(\hat{\rho}_a, \hat{\sigma}_a)$ estimados aquí alimentan el laboratorio de Tauchen; la lámina siguiente los pone sobre la serie.

(Fernald 2014; Basu, Fernald y Kimball 2006; Tauchen 1986)

Solow : $\frac{2}{3}$ crecimiento de la PTF neutral

Prescott ⇒ 70% fluctuaciones PIB son fluctuaciones de PTF

Cada salvedad recibe su veredicto empírico

Serie	$\hat{\rho}_a$ (nivel)	$\hat{\sigma}_\epsilon$	autocorr. del crecimiento
dtfp (cruda)	0.964	0.88	0.14
dtfp_util (ajustada)	0.965	0.81	-0.06



Los dos paneles son la primera fila de la tabla: el nivel con su tendencia y las innovaciones del AR(1).

(Fernald 2014; Basu, Fernald y Kimball 2006)

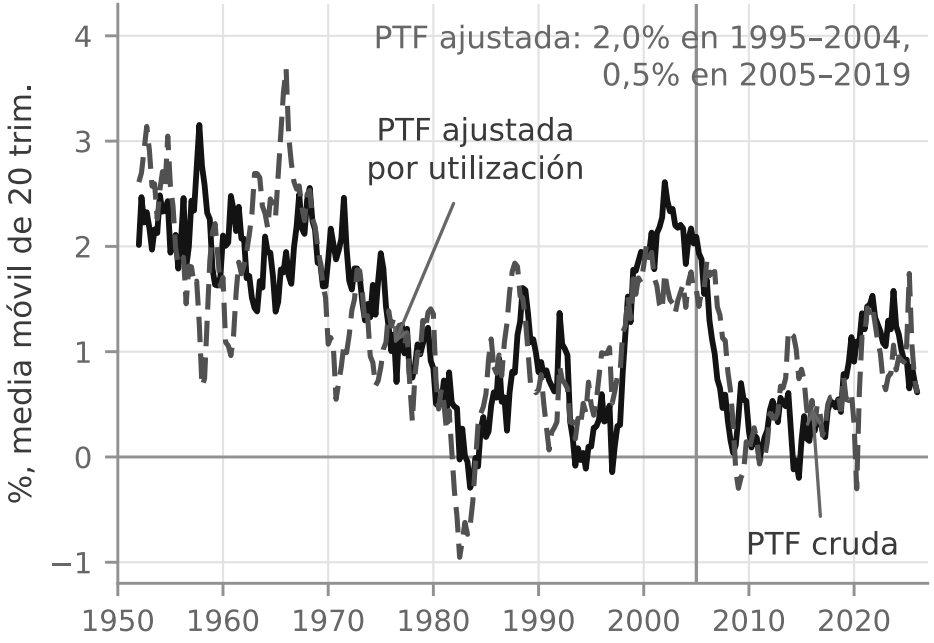
- **Uso variable del capital:** medido en lugar de conjeturado, el veredicto sorprende: $\hat{\rho}_a$ del nivel apenas se mueve; lo que hace el ajuste por utilización es borrar la autocorrelación del crecimiento trimestral ($0.14 \to -0.06$) y recortar $\hat{\sigma}_\epsilon$
- **Homocedasticidad:** depende de la serie. Con la **cruda**, ARCH-LM ($p = 2\times10^{-7}$) y Ljung-Box sobre ϵ^2 ($p = 8\times10^{-6}$) rechazan de plano; con dtfp_util **no** rechazan ($p \approx 0.15$): el ajuste por utilización se lleva también buena parte de la heterocedasticidad. La figura del GARCH se estima sobre dtfp
- **Estacionariedad en torno a una tendencia:** la tendencia cuadrática es una decisión de especificación, no un hecho; el debate regresa con los métodos de identificación

$$y_t = A_t K_{t-1}(u_t)^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$\Delta y(A_t) = a_t = y_t - \alpha K_{t-1} - \psi u_t - (1-\alpha) l_t$$

MÉTODOS BAYESIANOS

La PTF de Fernald: cruda frente a ajustada por utilización



La distancia entre las dos curvas es el uso variable del capital: se abre en las recesiones, cuando la PTF cruda exagera el frenazo.

σ_a no es constante: GARCH y la Gran Moderación

La tercera salvedad — la homocedasticidad — merece un examen aparte. Los residuos del PGD estimado con la TFP de Fernald son el insumo:

```
from puremacro import garch
g = garch.garch11_fit(res, mean='constant')  # res: residuos del PGD
g.sigma  # volatilidad condicional (res: MCO anterior, figuras_curso.py)
```

DT

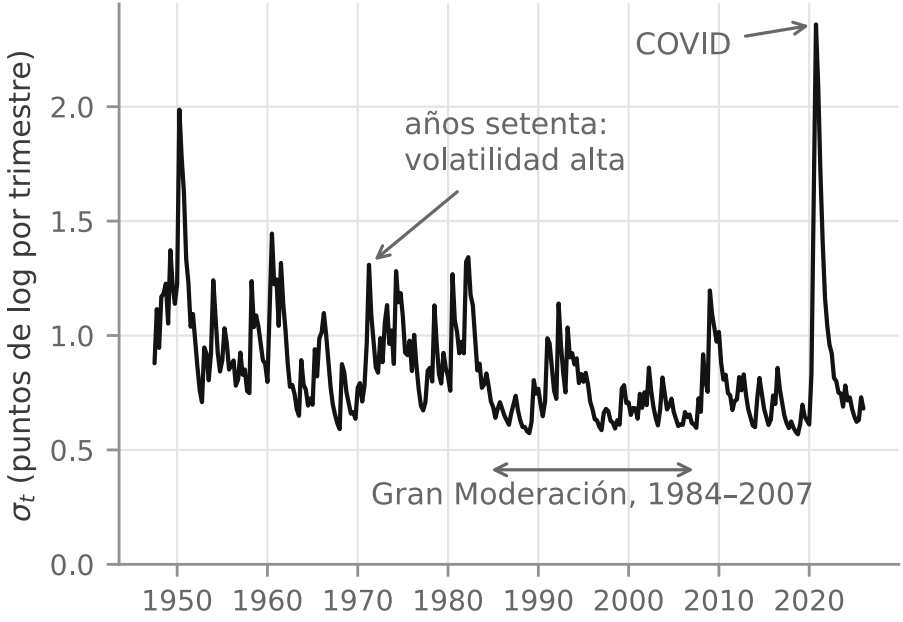
La serie de volatilidad condicional resultante está en la lámina siguiente.

- Años setenta volátiles, **Gran Moderación** 1984–2007, pico COVID: σ_a tiene su propia historia
- Si σ_a se mueve, el estado no es a sino (a, σ_a): **la volatilidad es en sí misma un choque** — exactamente lo que medían los tres termómetros de la apertura
- Sobre la pregunta abierta: la incertidumbre **macro** responde a la actividad; la **financiera** actúa como impulso (Ludvigson, Ma y Ng 2021). Y las *noticias* sobre productividad futura también mueven el ciclo (Beaudry y Portier)

Sea cual sea el PGD estimado, para resolver el modelo debemos transformarlo en un proceso discreto, lo cual generalmente se realiza mediante un **método de cuadratura**. Una de las cuadraturas más populares en economía es la **discretización de Tauchen**.

(McConnell y Pérez-Quirós 2000; Justiniano y Primiceri 2008; Fernández-Villaverde y Rubio-Ramírez 2013; Ludvigson, Ma y Ng 2021; Beaudry y Portier 2006)

Volatilidad condicional de la TFP: setenta, Gran Moderación y COVID



$\hat{\sigma}_t$ del GARCH(1,1) sobre los residuos del PGD de la TFP **cruda** de Fernald (dtfp): con dtfp_util no se rechaza la homocedasticidad.

Companion notebook: `T03_B_garch_volatility` (clustering, apalancamiento y contraste GARCH(1,1) vs. GJR-GARCH(1,1,1) sobre el VIX).

Dinámica macro ante choques de volatilidad estocástica

Choques de segundo momento

En aproximaciones de 1.^{er} orden, los choques de incertidumbre tienen efecto nulo por certeza equivalente ($\mathbb{E}_t[\sigma^2_{t+1}]$ desaparece de las reglas lineales).

En perturbaciones de 2.^{o}/3.^{er} orden o **GIRF**, un salto en la incertidumbre ($\Delta\sigma_t > 0$) provoca:

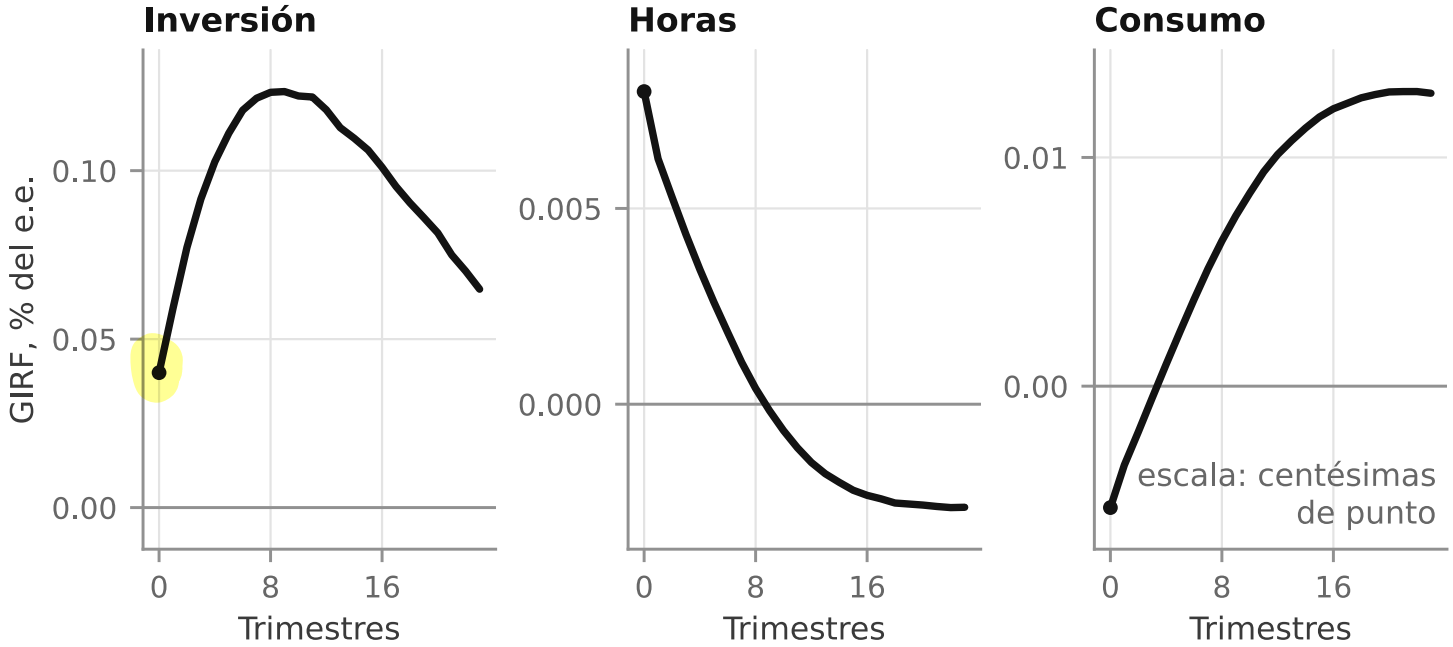
- **Caída precautoria inmediata** en consumo, inversión y horas trabajadas.
- Aumento en la demanda de activos de amortiguamiento (*buffer stock*).

Python (puremacro) — puremacro.dsge (T02_B, celda 7)

```
# GIRF por perturbacion con pruning
sol3 = m.solve(order=3)
girf = sol3.girf('e_a', horizon=40, size=0.007)
# el choque del cuaderno es de PTF; la lamina
# siguiente resuelve globalmente un RBC con
# volatilidad de dos estados
```

(Bloom 2009; Fernández-Villaverde et al. 2011; Basu y Bundick 2017) | Companion notebook: T02_B (GIRF a 2.^{o} y 3.^{er} orden con pruning).

El GIRF del choque de volatilidad, panel a panel



Ojo a la escala, en centésimas de punto: aquí el salto de σ_t se transmite por el ahorro y la inversión es la que más responde.

Discretización de Tauchen



$$a_{t+1} = (1-\rho_a)\mu_a + \rho_a\, a_t + \epsilon_{at+1}, \qquad \epsilon_{at+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2).$$

- Objetivo: aproximar por una **cadena de Markov** finita con estados $\{a_1, \ldots, a_S\}$ y matriz Π.[1]
- **Malla equiespaciada** sobre la desviación estándar *incondicional* $\sigma_a/\sqrt{1-\rho_a^2}$ (aquí σ_a es la desviación estándar del choque ϵ_{at+1}):

$$a_1 = \mu_a - m\,\frac{\sigma_a}{\sqrt{1-\rho_a^2}}, \quad a_S = \mu_a + m\,\frac{\sigma_a}{\sqrt{1-\rho_a^2}}, \quad \Delta = \frac{a_S - a_1}{S-1}, \quad a_i = a_1 + (i-1)\Delta.$$

  Típicos: $m \in [3,4]$, $S \geq 5$ (7–11 habitual).

- Calculamos una matriz de probabilidades

$$\Pi_{ij} = \Phi\left(\frac{b_{j+\frac{1}{2}} - \mu_a - \rho_a\,(a_i - \mu_a)}{\sigma_a}\right) - \Phi\left(\frac{b_{j-\frac{1}{2}} - \mu_a - \rho_a\,(a_i - \mu_a)}{\sigma_a}\right),$$

  donde

$$b_{j+\frac{1}{2}} = \frac{a_j + a_{j+1}}{2}, \qquad j = 1, \ldots, S-1.$$

  También debemos aproximar la probabilidad de los extremos.

[1] Farmer y Toda (2017, *Quantitative Economics*) proponen la discretización moderna por máxima entropía, que iguala momentos condicionales exactamente y domina a Tauchen y Rouwenhorst en procesos no gaussianos.

CADENAS DE MARKOV : AR(1)

El equivalente discreto a un proceso autorregresivo de orden 1 es una cadena de Markov con matriz de transición Π, que describe la transición condicional sobre una malla y genera un proceso dinámico en la probabilidad de cada nivel de productividad, que escribimos como:

$$\pi_a' = \Pi^\top \pi_a,$$

donde un elemento característico de la matriz de transición es $\pi(a'|a) \in \Pi$ tal que:

$$\sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a'|a) = 1 \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Esta matriz de transición induce una distribución estacionaria de productividad $\pi(a)$.

- La distribución estacionaria es el autovector izquierdo asociado al autovalor unitario de Π

$$\left(\Pi^\top - I\right) \pi_a = 0$$

$$E a = (1-\rho_a)\mu_a + \rho_a E a$$

$$a_{t+1} = (1-\rho_a)\mu_a + \rho_a a_t + \varepsilon_{t+1} \qquad F(a) \qquad E a = \mu_a$$

$$\varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$a \sim N\left[\mu_a, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho_a^2}\right] \qquad V(a) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho_a^2} \qquad V(a) = \rho_a^2 V(a) + \sigma_\varepsilon^2$$

Tauchen en 20 líneas

Con los $(\hat{\rho}_a, \hat{\sigma}_a)$ estimados con la TFP de Fernald ($S = 7$, $m = 3$):

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm

def tauchen(S, rho, sigma, m=3):   # n primero, como puremacro
    sd_a = sigma / np.sqrt(1 - rho**2)       # sd incondicional
    a    = np.linspace(-m*sd_a, m*sd_a, S)   # malla equiespaciada
    step = a[1] - a[0]
    P = np.zeros((S, S))
    for i in range(S):
        for j in range(1, S-1):
            hi = (a[j] + step/2 - rho*a[i]) / sigma
            lo = (a[j] - step/2 - rho*a[i]) / sigma
            P[i, j] = norm.cdf(hi) - norm.cdf(lo)
        P[i, 0]  = norm.cdf((a[0] + step/2 - rho*a[i]) / sigma)
        P[i, -1] = 1 - norm.cdf((a[-1] - step/2 - rho*a[i]) / sigma)
    return a, P
```

- π_a: el autovector izquierdo del autovalor unitario de Π (o iterar $\pi'_a = \Pi^\top \pi_a$); midan cuánto se **aleja** la malla ponderada de $\sigma_a/\sqrt{1-\rho_a^2}$: con $\hat{\rho}_a = 0.964$, $S = 7$ y $m = 3$ ya la infla un 26 % y la ρ implícita sube a 0.980
- Repetir con $\rho_a = 0.99$: el sesgo pasa de 26 % a 32 % y la ρ implícita a 0.9999 — motiva Rouwenhorst
- Cierre operativo: esta Π es el insumo directo de un **método global** (VFI/EGM), como el EGM de la lámina siguiente; Dynare, en cambio, resuelve por perturbación y se alimenta de la varianza del choque (σ_a), no de Π

(Tauchen 1986; Rouwenhorst 1995; Kopecky y Suen 2010)

Rouwenhorst replica ρ_a y σ_a exactamente — también con $\rho_a = 0.99$

Sin malla que truncar ni m que elegir: la matriz se construye por recursión con $p = q = \frac{1+\rho_a}{2}$,

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad \Pi_S = p \begin{bmatrix} \Pi_{S-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} + (1-p) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Pi_{S-1} \\ 0 & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} + (1-q) \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & 0 \\ \Pi_{S-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \Pi_{S-1} \end{bmatrix},$$

dividiendo entre 2 las filas interiores, con malla equiespaciada en $[\mu_a - \psi,\ \mu_a + \psi]$, $\psi = \sqrt{S-1}\ \frac{\sigma_a}{\sqrt{1-\rho_a^2}}$.

- **Kopecky y Suen (2010):** la cadena reproduce **exactamente** ρ_a y la varianza incondicional $\sigma_a^2/(1-\rho_a^2)$, para cualquier S; la estacionaria es binomial

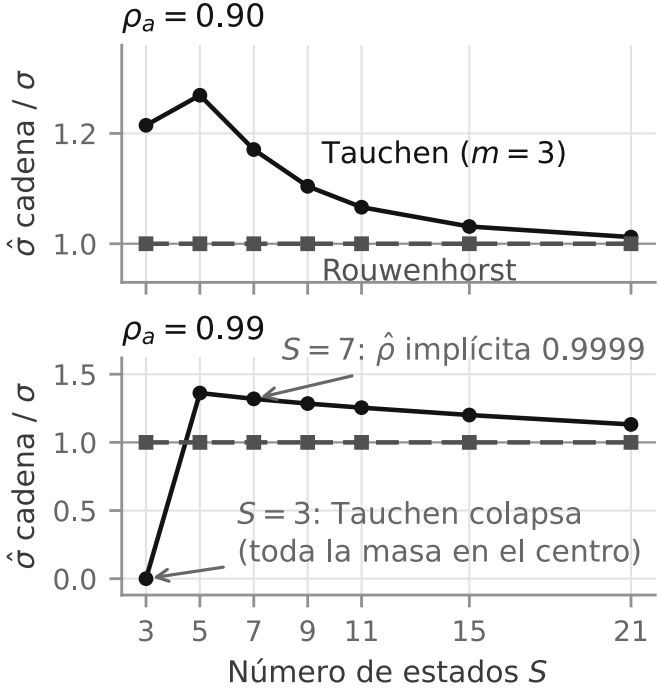
```
from puremacro import vfi
grid, P = vfi.rouwenhorst(7, rho, sigma)
```

(Rouwenhorst 1995; Kopecky y Suen 2010)

Tauchen infla σ al crecer ρ_a; Rouwenhorst clava los dos momentos

- Remate del laboratorio: con $\rho_a = 0.99$ y $S = 7$, Tauchen infla σ un 32 % y su $\hat{\rho}$ implícita es 0.9999; con $S = 3$ colapsa. Rouwenhorst clava ambos momentos

El eje vertical es el cociente entre la $\hat{\sigma}$ de la cadena y la σ incondicional del AR(1): vale 1 cuando la discretización no distorsiona. Rouwenhorst es la recta en 1 para todo S; Tauchen sólo se acerca cuando S crece, y tanto peor cuanto más persistente es el proceso.



(Rouwenhorst 1995; Kopecky y Suen 2010) | Companion: `T09_A_validation_gallery` (celda 13) y `T06_A_wealth_inequality`.

Discretización y Método de Grillas Endógenas (EGM) en Python

Python (puremacro) — Discretización y EGM en Python (puremacro.vfi)

```
from puremacro.vfi.discretize import tauchen, rouwenhorst
from puremacro.vfi.egm import solve_egm
import numpy as np

# 1. Discretización de Tauchen o Rouwenhorst
z_grid, P_z = tauchen(7, rho=rho_a, sigma=sigma_a, m=3.0)

# 2. Resolución ultra-rápida con Endogenous Grid Method (Carroll 2006)
a_grid = np.linspace(0.0, 40.0, 200)   # malla de activos
# solve_egm invierte la Euler sobre a': O(N_a * N_z) sin maximización no lineal
res = solve_egm(a_grid, z_grid, np.exp(z_grid), P_z, beta=0.96, r=0.04, gamma=2.0)
# Políticas continuas: consumo res.c y activos siguientes res.aprime
```

La matriz de transición Π discretizada alimenta directamente el *método de grillas endógenas* (EGM, Carroll 2006), que invierte la ecuación de Euler en lugar de optimizar numéricamente en cada punto de la malla: el bloque de arriba resuelve el problema de fluctuaciones de ingreso en Python sobre la Π que acaba de salir de `tauchen`.

Companion notebooks: `T09_A_validation_gallery` (celda 13, discretización con `rouwenhorst`) y `T06_A_wealth_inequality` (celda 6, EGM con equilibrio general de Aiyagari).

Un modelo estático con riesgo

$I > 1$

Estados: conjunto finito $\mathcal{S} = \{1, \ldots, S\}$ con probabilidades $\pi(s) \in (0,1)$, $\sum_s \pi(s) = 1$.

Hogares: $i = 1, \ldots, I$. Un plan es $c_i(s) \geq 0$ para cada estado s. Cada hogar posee una dotación contingente $y_i(s)$.

Preferencias: suponemos un marco de utilidad esperada

$$U_i = \sum_{s=1}^{S} \pi(s)\, u_i[c_i(s), s]\,.$$

Factibilidad: en la economía el consumo agregado no puede superar las dotaciones agregadas en cada estado de la naturaleza:

$$\sum_{i=1}^{I} c_i(s) = C(s) \leq Y(s) = \sum_{i=1}^{I} y_i(s).$$

La asignación del planificador social

$$\max_{\{c_i(s)\forall s\in\mathcal{S}\}_{i=1}^{I}} \sum_{i=1}^{I} \mu_i \sum_{s\in\mathcal{S}} \pi(s)\, u_i[c_i(s), s] \quad \text{s.a.} \quad C(s) \leq Y(s)\ \forall s$$

Peso de pareto

de donde obtenemos las siguientes condiciones de primer orden:

$$\mu_i\, \pi(s)\, u_i'[c_i(s), s] = \lambda(s) \qquad \forall i, s.$$

Surgen dos criterios de asignación eficiente:

- Para un mismo estado de la naturaleza y cualesquiera dos hogares

$$RMS\left[c_i(s), c_j(s)\right] = \frac{u_i'\left[c_i(s), s\right]}{u_j'\left[c_j(s), s\right]} = \frac{\mu_j}{\mu_i}$$

⇒ Aseguramiento perfecto

- Para un mismo hogar y cualesquiera dos estados de la naturaleza

$$RMS\left[c_i(s), c_i(p)\right] = \frac{\lambda(s)}{\lambda(p)} \frac{\pi(p)}{\pi(s)}$$

Arrow–Debreu y mercados de seguros: equivalencias

Equilibrio Arrow Debreu

En esta economía hay tantos bienes como estados de la naturaleza y para cada bien existe un precio de Arrow–Debreu $q(s) > 0$. Cada hogar enfrenta un único presupuesto que valora el consumo de todos los estados a precios contingentes (esto solo es posible si existen mercados de seguros **completos**):

$$\max_{c_i(\cdot)} \sum_s \pi(s) u_i\left[c_i(s), s\right] \quad \text{s.a.} \quad \sum_s q(s)\, c_i(s) \leq \sum_s q(s)\, y_i(s).$$

CPOs individuales y asignación eficiente del riesgo:

$$\pi(s)\, u_i'\left[c_i(s), s\right] = \lambda_i\, q(s) \quad \Longrightarrow \quad RMS_i\left[c_i(s), c_i(p)\right] = \frac{q(s)}{q(p)} \frac{\pi(p)}{\pi(s)}.$$

Los mercados asignan de forma eficiente el riesgo con independencia de la distribución inicial de recursos entre hogares y estados de la naturaleza.

Equilibrio secuencial

Versión equivalente con mercados de seguros: los hogares pagan un precio justo $q(s)$ por una promesa de pago $b_i(s)$ tal que

$$c_i(s) = y_i(s) + b_i(s), \qquad \sum_s q(s)\, b_i(s) = 0.$$

La solución con mercados de seguros es equivalente a Arrow–Debreu y a la asignación que elegiría un planificador social. Vamos a extender estas ideas a un contexto dinámico, donde los hogares asignan probabilidades a historias, formando árboles de decisión.

Arrow–Debreu y secuencial implementan la misma asignación

Una historia hasta t es $s^t = (s_0, s_1, \ldots, s_t)$, con probabilidad $\pi(s^t)$ y condicionales $\pi(s_{t+1} \mid s^t)$; el estado inicial s_0 está dado. Sobre ese árbol caben dos estructuras de mercado, y ambas producen la misma asignación de equilibrio (árbol, definiciones completas y límite natural de endeudamiento en el apéndice):

	Arrow–Debreu dinámico	**Equilibrio secuencial**
Objeto de precios	$Q(s^t)$: precio, pactado en $t=0$, de una unidad de consumo entregada en la historia s^t	$q(s_{t+1} \mid s^t)$: precio en el nodo s^t de una unidad entregada mañana si ocurre s_{t+1}
Mercados	abren una sola vez, en $t=0$	abren y cierran en cada periodo
Restricción presupuestaria	una sola, ex ante: $\sum_{t\geq 1}\sum_{s^t} Q(s^t)\, c_i(s^t) \leq \sum_{t\geq 1}\sum_{s^t} Q(s^t)\, y_i(s^t)$	una por nodo: $c_i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} \mid s^t)\, a_i(s_{t+1} \mid s^t) = y_i(s^t) + a_i(s^t)$, con límite natural de endeudamiento
Equivalencia	con límites naturales de endeudamiento, ambas replican la asignación del planificador; los precios se enlazan componiendo: $Q(s^{t+1}) = Q(s^t)\, q(s_{t+1} \mid s^t)$	

Con mercados completos, el consumo sigue a la dotación agregada, no a la propia

El planificador pondera hogares con μ_i y reparte los recursos historia por historia, $\sum_i c_i(s^t) = C(s^t) \leq Y(s^t)$, con multiplicador $\lambda(s^t)$:

$$\max_{\{c_i(s^t)\}} \sum_i \mu_i \sum_{t\geq 1} \beta^{t-1} \sum_{s^t} \pi(s^t)\, u_i\left[c_i(s^t), s^t\right] \implies \mu_i\, \beta^{t-1} \pi(s^t)\, u_i'\left[c_i(s^t), s^t\right] = \lambda(s^t).$$

El lado derecho no depende de i: dividiendo entre $\beta^{t-1}\pi(s^t) > 0$, para cualesquiera dos hogares y cualquier historia:

$$\mu_i\, u_i'\left[c_i(s^t), s^t\right] = \mu_1\, u_1'\left[c_1(s^t), s^t\right] \implies c_i(s^t) = \left(u_i'\right)^{-1}\left\{\frac{\mu_1}{\mu_i}\, u_1'\left[c_1(s^t), s^t\right]\right\}.$$

Con la restricción de recursos, el consumo de cada hogar queda determinado por el **agregado** $C(s^t) = Y(s^t)$, sus preferencias y el peso μ_i: la secuencia individual de dotaciones no interviene.

Teorema de aseguramiento pleno (Arrow–Debreu / Wilson)

Con preferencias CRRA idénticas ($u'(c) = c^{-\gamma}$), las participaciones son **constantes**:

$$c_i(s^t) = \omega_i\, C(s^t), \qquad \omega_i = \frac{(\mu_i/\mu_1)^{1/\gamma}}{\sum_j (\mu_j/\mu_1)^{1/\gamma}}, \qquad \sum_i \omega_i = 1.$$

Todos los consumos crecen a la misma tasa, historia por historia. Arrow–Debreu en $t = 0$, secuencial nodo a nodo y recursiva en funciones implementan exactamente esa asignación.

Contraste empírico: la predicción de participaciones constantes es falsable con datos agregados: ¿qué observación empírica bastaría para rechazarla?

¿Y si esos mercados no existen? Ahorro precautorio y prudencia de Kimball

$u''' = 0 \rightarrow$ Neutrales ante el riesgo

Prudencia de Kimball (1990)

Si $u'''(c) > 0$, la utilidad marginal $u'(c)$ es estrictamente convexa. Por la **desigualdad de Jensen**:

$$\mathbb{E}\left[u'(c+\tilde{\epsilon})\right] > u'\left(\mathbb{E}[c+\tilde{\epsilon}]\right) = u'(c).$$

Ahorro por motivos de precaución

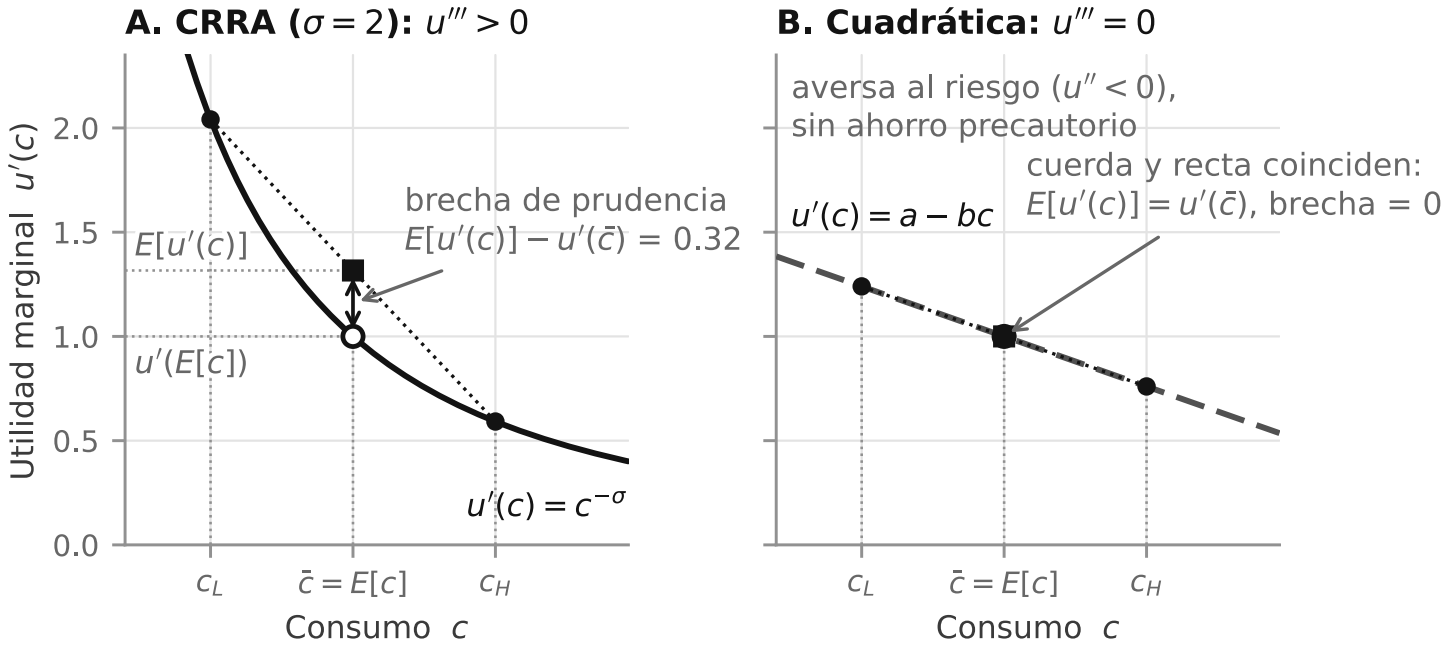
$$\lambda\, u'(c+\epsilon_1) + (1-\lambda)\, u'(c+\epsilon_2) \gtrless u'\left[c + \lambda\epsilon_1 + (1-\lambda)\epsilon_2\right]$$

- **Certeza equivalente** ($u''' = 0$, utilidad cuadrática): la incertidumbre no altera el consumo; el ahorro precautorio es nulo.
- **Riesgo no asegurable** ($u''' > 0$, CRRA con $\gamma > 0$): el riesgo individual eleva la utilidad marginal esperada, forzando a los hogares a acumular un *buffer stock* de riqueza.
- El consumo depende de la historia individual y la **distribución de riqueza** se vuelve variable de estado agregada.

(Kimball 1990; Carroll 1997; Aiyagari 1994) | Conduce a la macroeconomía con agentes heterogéneos (HANK).

Precautionary savings // working longer hours

La brecha de prudencia: u' convexa frente a u' lineal



Compare la cuerda con el valor en la media: con CRRA queda por encima, y esa distancia (0.32) es el ahorro precautorio.

(Kimball 1990; Carroll 1997)

¿Se cumple el teorema? La anomalía de correlación del consumo

El pleno aseguramiento es falsable: con mercados completos, el consumo debería covariar entre países **más** que el producto: $\text{corr}(\Delta C_i, \Delta C_j) > \text{corr}(\Delta Y_i, \Delta Y_j)$.

Pregunta de votación (predict-then-reveal)

Voten antes de ver la figura: ¿qué correlación bilateral media es mayor en los datos de las cuentas nacionales de la OCDE: la del consumo o la del producto?

Python (puremacro) — puremacro.volatility — la anomalía de cantidad

```
from puremacro.fetch.oecd_qna_expenditure import fetch_qna_expenditure
from puremacro import volatility
qna = fetch_qna_expenditure(codes=['USA','SWE','KOR','DEU','FRA','ITA',
                                   'ESP','GBR','JPN','CAN','AUS','NLD'])
# Crecimiento = 100 * dlog por pais; calculo de matrices de correlacion
volatility.SigmaObject(...).mean_corr()  # corr media de dC entre paises
volatility.SigmaObject(...).mean_corr()  # corr media de dY entre paises
```

- **Consumo privado vs total**: `log_con_real` es consumo final total (P3/S1); para el consumo privado estricto: $\exp(\text{log_con_real}) - \exp(\text{log_govcon_real})$ (P3/S13).
- **Caso México**: `fetch_qna_expenditure` filtra volúmenes encadenados (`'L'`); México publica base fija (`'Q'`). En el caché del curso (`oecd_qna_scb.csv`), $\sigma(\Delta C)/\sigma(\Delta Y) = 0.74$ en 1995–2019: el consumo mexicano sí se suaviza en primeras diferencias.

(Backus, Kehoe y Kydland 1992; Lewis 1996; Aguiar y Gopinath 2007)

La revelación: en los datos gana el *producto*, 0.40 vs 0.21

La Anomalía de Cantidad (BKK 1992)

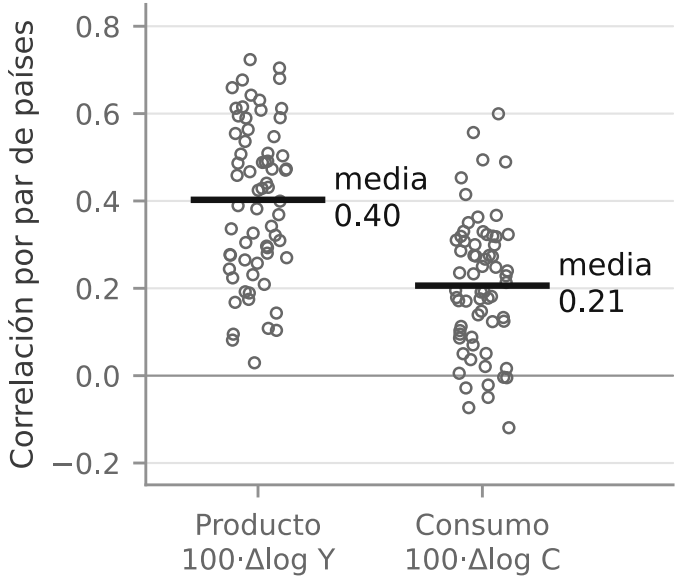
La teoría de mercados completos predice un amplio aseguramiento internacional del consumo:

$$\text{corr}(\Delta C_i, \Delta C_j) > \text{corr}(\Delta Y_i, \Delta Y_j).$$

En las cuentas nacionales de 12 países de la OCDE ocurre exactamente lo opuesto:

- Correlación media de producto: **0.40**.
- Correlación media de consumo: **0.21**.

Veredicto empírico: Es la *quantity anomaly* de Backus, Kehoe y Kydland (1992). Treinta años después, el comovimiento del producto domina al del consumo: el riesgo individual y nacional no está plenamente asegurado.



Cada punto es un par de países: 66 pares de los 12 de la OCDE, 1995–2019.

(Backus, Kehoe y Kydland 1992; Lewis 1996; Aguiar y Gopinath 2007) | Cálculo del curso sobre el caché `oecd_qna_bkk.csv`: sin cuaderno companion.

¿Dónde están los mercados Arrow–Debreu? El desempleo como estado no asegurado

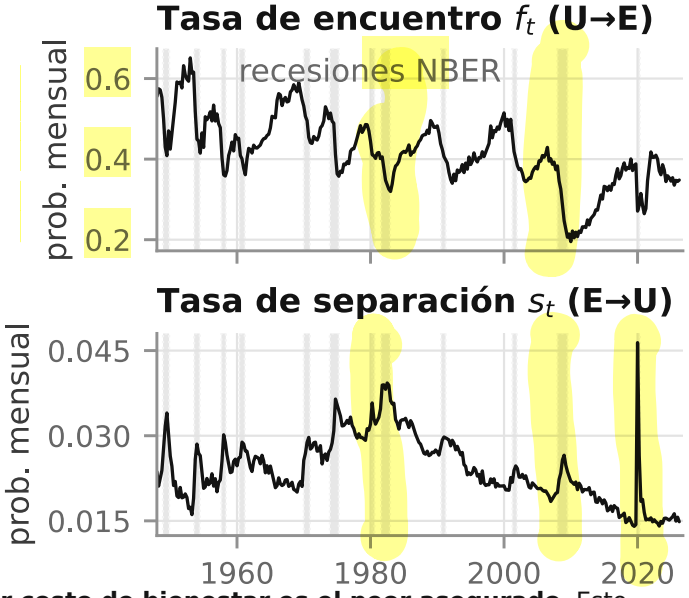
i.e.: rico asegurado en una economía cerrada

Debate:

- ¿Qué contratos reales se parecen a $b_i(s)$? (seguro de desempleo, CDS, bonos ligados al PIB de Argentina 2005)
- ¿Por qué nadie vende "seguro de recesión"? (riesgo moral, selección adversa, riesgo agregado no diversificable)

Minifigura en vivo: las tasas de encuentro f y de separación s del desempleo, con el estimador de Shimer (2012) sobre el desempleo de corta duración. *Ojo:* aquí s es la **tasa de separación**, no el estado de la naturaleza del resto del mazo.

```
from puremacro import fetch
U  = fetch.fetch_fred('UNEMPLOY')
E  = fetch.fetch_fred('CE16OV')
Us = fetch.fetch_fred('UEMPLT5')    # U < 5 semanas
Us.loc['1994-01-01':] *= 1.1        # rediseno CPS 1994
f = 1 - (U.shift(-1) - Us.shift(-1)) / U   # U->E
s = Us.shift(-1) / E                       # E->U
```



f se desploma y s se dispara en cada recesión: **el estado con mayor costo de bienestar es el peor asegurado**. Esto siembra dos semillas: los modelos de mercados incompletos (Aiyagari, Huggett) y el tema desempleo–vacantes.

(Shimer 2005, 2012; Chetty 2008; Krueger y Perri 2006)

Un modelo dinámico con producción

Tecnología: la economía produce un bien $y_t(s^t)$ mediante una tecnología Cobb–Douglas:

$$y_t(s^t) = A(s^t)k_{t-1}^{\alpha}(s^{t-1})l_t^{1-\alpha}(s^t),$$

donde $A(s^t)$ sigue un proceso de Markov y el acervo de capital $k_{t-1}(s^{t-1})$ se acumula según:

$$k_t(s^t) = (1-\delta)k_{t-1}(s^{t-1}) + i_t(s^t).$$

Además de $A(s^t)$ hay una segunda fuente de riesgo natural: el precio del equipo — un choque específico a la inversión que reaparece con la q de Tobin.

Preferencias: vamos a considerar un hogar representativo

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^{t-1}\, \pi(s^t)\, u\left[c(s^t),\, h(s^t);\, s^t\right].$$

Factibilidad:

$$c_t(s^t) + i_t(s^t) = y_t(s^t),$$

$$l_t(s^t) + h_t(s^t) = 1.$$

Planificador social: planteamiento y eficiencia estática

El lagrangiano, con un multiplicador $\lambda(s^t)$ por cada restricción de recursos (fuera del peso $\beta^{t-1}\pi(s^t)$):

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s^t} \Big\{ \beta^{t-1}\pi(s^t)\, u\left[c(s^t), 1-l(s^t)\right] + \lambda(s^t)\left[A(s^t)k_{t-1}^{\alpha}(s^{t-1})l_t^{1-\alpha}(s^t) + (1-\delta)k_{t-1}(s^{t-1}) - k_t(s^t) - c_t(s^t)\right]\Big\}.$$

Condiciones de primer orden de $c(s^t)$ y $l(s^t)$:

$$\beta^{t-1}\pi(s^t)\, u_c\left[c(s^t), 1-l(s^t); s^t\right] = \lambda(s^t), \qquad \beta^{t-1}\pi(s^t)\, u_h\left[c(s^t), 1-l(s^t); s^t\right] = \lambda(s^t)\,(1-\alpha)\frac{y_t(s^t)}{l_t(s^t)}.$$

Condición de eficiencia estática (cociente de las dos anteriores):

$$\frac{u_h\left[c(s^t), 1-l(s^t); s^t\right]}{u_c\left[c(s^t), 1-l(s^t); s^t\right]} = (1-\alpha)\frac{y_t(s^t)}{l_t(s^t)}.$$

La Euler iguala el costo de invertir con su rendimiento contingente

Paso 1 — CPO de $k_t(s^t)$: $k_t(s^t)$ resta recursos en el nodo s^t y los aporta, vía producción y depreciación, en cada sucesor $s^{t+1} \succ s^t$:

$$\lambda(s^t) = \sum_{s^{t+1} \succ s^t} \left[\alpha \frac{y_{t+1}(s^{t+1})}{k_t(s^t)} + 1 - \delta \right] \lambda(s^{t+1}).$$

Paso 2 — sustituir la CPO del consumo, $\lambda(s^t) = \beta^{t-1}\pi(s^t)u_c\left[c(s^t), 1 - l(s^t); s^t\right]$:

$$\beta^{t-1}\pi(s^t)\,u_c(s^t) = \sum_{s^{t+1} \succ s^t} \beta^t \pi(s^{t+1})\,u_c(s^{t+1}) \left[\alpha \frac{y_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta \right].$$

Paso 3 — propiedad de Markov: siempre que podamos escribir

$$\pi(s^t) = \pi(s_t \mid s_{t-1})\pi(s_{t-1} \mid s_{t-2}) \ldots \pi(s_1 \mid s_0)$$

—sin factor $\pi(s_0)$: el estado inicial s_0 está dado, así que $\pi(s_0) = 1$—, entonces $\pi(s^{t+1})/\pi(s^t) = \pi(s_{t+1} \mid s_t)$ y, dividiendo entre $\beta^{t-1}\pi(s^t)u_c(s^t)$, obtenemos

PRICING KERNEL

$$1 = \sum_{s_{t+1}} \pi(s_{t+1}|s_t)\,\beta\,RMS(c_{t+1}, c_t) \left(\alpha \frac{y_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta \right), \qquad \beta\,RMS(c_{t+1}, c_t) = \beta \frac{u_c(s^{t+1})}{u_c(s^t)}.$$

Ese producto $\beta\,RMS(c_{t+1}, c_t)$ es el **factor de descuento estocástico** (el $Q_{t,t+1}$ de B2). Ojo al orden de los argumentos: es el mismo de la lámina de asignación eficiente ($RMS[x, y] = u'(x)/u'(y)$, numerador = primer argumento), de modo que la utilidad marginal de mañana va arriba.

Descentralización del modelo

La descentralización del modelo con riesgo agregado puede escribirse igualmente como un equilibrio Arrow–Debreu, un equilibrio secuencial o un equilibrio recursivo. Los capítulos 7, 8 y 12 de **RMT** exploran estos conceptos con mucho más detalle.

Quedan por examinar los aspectos más aplicados de la teoría de ciclos económicos reales: cuáles son los hechos estilizados con los que debería ser compatible y cómo resolver numéricamente el modelo, siendo lo más fiel posible a los hechos estilizados a largo plazo.

Antes de eso, un cierre operativo: llevamos $\pi(s)$ a los datos una última vez, construyendo nuestra propia medida de incertidumbre a partir de texto.

`narrative.epu()` cuenta palabras, no magia: el índice es auditable

- **Tokenización:** cada artículo se normaliza (minúsculas, sin puntuación) y se separa en palabras
- **Tres diccionarios** de términos: *economía*, *política* e *incertidumbre* (“uncertain”, “uncertainty”, . . .)
- **Conteo por artículo:** un artículo cuenta si contiene al menos un término de *cada* grupo (co-ocurrencia E$\times$P$\times$U); el índice trimestral agrega la señal de los artículos que cuentan
- **Estandarización:** la serie se normaliza — z-score o la escala 100 de Baker–Bloom–Davis sobre un periodo base
- **El LTUI direccional** añade un cuarto diccionario de polaridad (empleo $\times$ incertidumbre $\times$ tecnología $\times$ al alza/a la baja), pondera cada pasaje por la densidad de términos tecnológicos y descarta las menciones negadas (“*not* uncertain”)
- **Sin redes neuronales:** es conteo transparente y reproducible — el juicio económico está en elegir bien los diccionarios, y ahí es donde ustedes entran

(Baker, Bloom y Davis 2016; Gentzkow, Kelly y Taddy 2019)

Miniproyecto: tu índice de incertidumbre desde texto (y la IA en él)

Con el **Beige Book** por secciones desde 1990: (i) construyan un índice tipo EPU propio; (ii) calculen el LTUI direccional para el empleo (ltui_up / ltui_down); (iii) validen contra el EPU oficial; (iv) párrafo final: ¿la incertidumbre-IA post-2022 aparece como riesgo **al alza** o **a la baja** para el empleo?

```
from puremacro import narrative
from puremacro.fetch import epu as epu_oficial  # submodulo explicito
# iter_beige_book produce 6-tuplas; epu()/ltui() esperan 4-tuplas:
recs = [(d, txt, url, meta)
        for (d, dist, sec, txt, url, meta)
        in narrative.iter_beige_book(since='1990-01-01',
                                     granularity='per_section')]
idx_epu  = narrative.epu(recs, country='USA')        # EPU propio
idx_up   = narrative.ltui_up(recs, country='USA')    # riesgo al alza
idx_down = narrative.ltui_down(recs, country='USA')  # riesgo a la baja
oficial  = epu_oficial.fetch()        # validacion contra el oficial
# alternativa idiomatica para (i): narrative.bbui(...)
# sobre las 6-tuplas crudas
```

Entregable central: la figura que valida su índice contra el EPU oficial la construyen ustedes — es el corazón del miniproyecto y por eso no se adelanta.

Nota operativa: el corpus se reparte predescargado como CSV — el scraping de federalreserve.gov es frágil y el curso corre con la red cerrada por omisión.

(Baker, Bloom y Davis 2016; Ahir, Bloom y Furceri 2022)

Riesgo macroeconómico, inflación y la regla de Taylor

El dilema del banco central ante choques de oferta

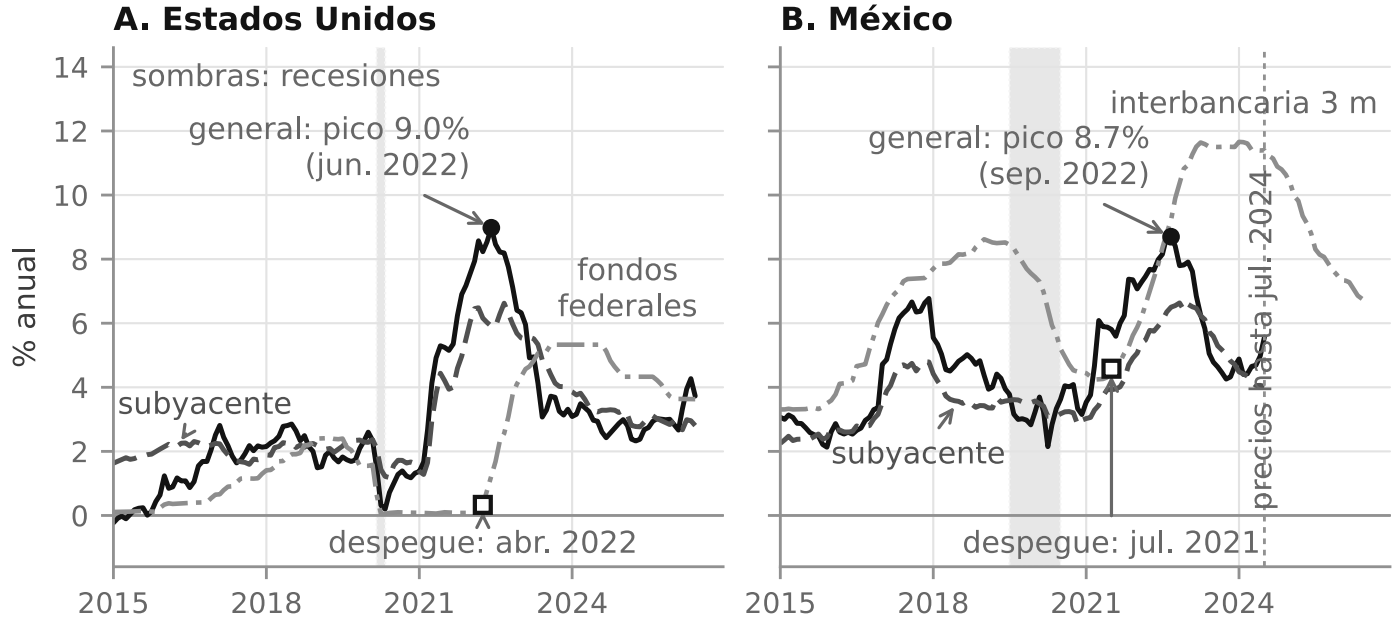
Bajo choques de costo u oferta (disrupción de cadenas de suministro, materias primas), la *divina coincidencia* colapsa: estabilizar la inflación exige inducir una brecha de producto negativa, forzando un agresivo ciclo de alzas de tasas de interés.

- **Choque inflacionario 2021–2023**: la inflación general superó el $8\,\%$ en ambos países — pico de $9.0\,\%$ en EUA (jun. 2022) y de $8.7\,\%$ en México (sep. 2022), con la subyacente en $6.6\,\%$ en los dos —, lo que exigió un endurecimiento monetario sincronizado.
- **Diferencial de tasas**: Banco de México inició su ciclo alcista en junio de 2021, nueve meses antes que la Fed (marzo de 2022) — la figura rotula el despegue un mes después, con un criterio mecánico sobre promedios mensuales —, manteniendo una prima ~ 600 pb para anclar expectativas y mitigar riesgo cambiario.

Series (FRED): CPIAUCSL, CPILFESL y FEDFUNDS (EUA); CPALTT01MXM659N, CPGRLE01MXM659N e IR3TIB01MXM156N (México), esta última la interbancaria a 3 meses.

(Federal Reserve Board; Banco de México; BLS; INEGI) | Companion notebooks: `T02_C` (Nuevo Keynesiano) & `T03_F` (análisis narrativo).

Inflación y tasas de política en EUA y México, 2015–2026



Los dos paneles comparten el eje vertical: la tasa mexicana despega antes y se queda por encima de la de fondos federales; para México se grafica la interbancaria a 3 meses, proxy declarada de la tasa objetivo de Banxico.

Apéndice

Construcción completa del bloque Arrow–Debreu dinámico: árbol de historias, reparto eficiente del riesgo por historias, definiciones de equilibrio, límite natural de endeudamiento y formulación recursiva del intercambio puro

Apéndice: reparto eficiente del riesgo por historias

Podemos escribir la condición de asignación eficiente del riesgo como

$$\mu_1 u_1' \left[c_1(s^t), s^t\right] = \mu_i u_i' \left[c_i(s^t), s^t\right],$$

lo que implica que

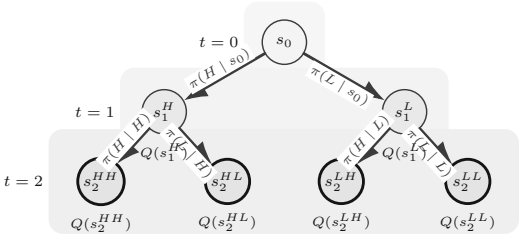
$$c_i = \left(u_i'\right)^{-1} \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_i} u_1' \left[c_1(s^t), s^t\right] \right\},$$

y combinado con la restricción de recursos, el consumo de cada hogar depende de la dotación agregada, sus preferencias y el peso que el planificador social decida asignarle, no de la secuencia de dotaciones asignada por la naturaleza. Además, podemos mostrar que esta asignación surge también como resultado de:

- Un equilibrio competitivo Arrow–Debreu, donde todos los intercambios se negocian en $t = 0$
- Un equilibrio secuencial, donde los mercados abren y cierran en cada periodo
- Un equilibrio recursivo, donde las decisiones son funciones de variables de estado individuales y agregadas

Dinámico: árbol de historias y planificador social

Una historia hasta t es $s^t = (s_0, \ldots, s_t)$, con probabilidades $\pi(s^t)$ y $\pi(s_{t+1} \mid s^t)$.
Preferencias: $U_i = \mathbb{E}\{\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\, u_i[c_i(s^t), s^t]\}$, $\beta \in (0,1)$.
Factibilidad por nodo: $\sum_i c_i(s^t) \le Y(s^t)$.



Planificador social por historias

El planificador social elige consumos por historia:

$$\max_{\{c_i(s^t)\}} \sum_{i=1}^{I} \mu_i \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \sum_{s^t} \pi(s^t)\, u_i\left[c_i(s^t), s^t\right]$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_i c_i(s^t) \le Y(s^t) \quad \forall s^t,$$

con condiciones de primer orden

$$\mu_i \beta^{t-1} \pi(s^t) u_i'\left[c_i(s^t), s^t\right] = \lambda(s^t) \qquad \forall i, s^t.$$

Los precios Arrow $Q(s^t)$ valoran las entregas en el nodo s^t, alineando el óptimo social con los equilibrios de mercado.

Equilibrio competitivo Arrow–Debreu dinámico

Definición: Un equilibrio Arrow–Debreu dinámico es un conjunto de:

- Precios $\{Q(s^t)\}_{t\geq 1,\, s^t}$, donde $Q(s^t)$ es el precio, pactado en $t=0$, de una unidad de consumo entregada en la historia $s^t=(s_0,\ldots,s_t)$; el estado inicial s_0 y las dotaciones están dados.
- Asignaciones $\{c_i(s^t)\}_{i,s^t}$ para cada hogar i y cada historia s^t.

tales que:

1. **Optimización individual:** Cada hogar i resuelve

$$\max_{\{c_i(s^t)\}} \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^{t-1}\pi(s^t)u_i\left[c_i(s^t),s^t\right]$$

   sujeto a la restricción presupuestaria ex ante

$$\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s^t} Q(s^t)\,c_i(s^t) \;\leq\; \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s^t} Q(s^t)\,y_i(s^t).$$

2. **Factibilidad:** Para toda historia s^t,

$$\sum_i c_i(s^t)=\sum_i y_i(s^t).$$

Los precios $Q(s^t)$ implementan un mercado completo de contingencias en $t=0$, garantizando la equivalencia con la asignación del planificador social.

Equilibrio competitivo secuencial

Definición: Un equilibrio secuencial consiste en:

- Precios contingentes $\{q(s_{t+1}|s^t)\}$ que determinan el valor en t de una unidad de consumo entregada en $t+1$ si ocurre s_{t+1} tras la historia s^t.
- Planes de consumo $\{c_i(s^t)\}$ y posiciones en activos $\{a_i(s_{t+1}|s^t)\}$ para cada hogar i.

tales que:

1. **Optimización individual:** Cada hogar i resuelve

$$\max_{c_i(s^t),a_i(s_{t+1}|s^t)} \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u_i \left[c_i(s^t), s^t \right] \right\}$$

   sujeto a la restricción presupuestaria secuencial

$$c_i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1}|s^t) a_i(s_{t+1}|s^t) = y_i(s^t) + a_i(s^t),$$

   con el **límite natural de endeudamiento:** $a_i(s_{t+1}|s^t) \geq \underline{a}_i(s^{t+1})$.

2. **Mercados de activos:** $\sum_i a_i(s_{t+1}|s^t) = 0$ para todo s^t, s_{t+1}.
3. **Factibilidad de bienes:** $\sum_i c_i(s^t) = \sum_i y_i(s^t)$ para todo s^t.

Resultado: Con límites naturales de endeudamiento, este equilibrio es equivalente al Arrow–Debreu y genera la asignación del planificador social.

Límite natural de endeudamiento

En un equilibrio secuencial, para evitar esquemas de Ponzi se impone una cota inferior sobre los activos:

$$a_i(s_{t+1}|s^t) \geq \underline{a}_i(s^{t+1}).$$

Los precios de Arrow se componen a lo largo del árbol:

$$Q\big(s^{t+\tau} \mid s^{t+1}\big) = \prod_{k=1}^{\tau-1} q\big(s_{t+k+1} \mid s^{t+k}\big)$$

con $Q\big(s^{t+1} \mid s^{t+1}\big) = 1$ para todo $s^{t+\tau} \succeq s^{t+1}$.
El **límite natural de endeudamiento** es:

$$\underline{a}_i(s^{t+1}) = -\sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{s^{t+\tau} \succeq s^{t+1}} Q\big(s^{t+\tau} \mid s^{t+1}\big)\, y_i(s^{t+\tau}).$$

Intuición Económica (Aiyagari)

- **Cota natural no ad hoc**: Es el endeudamiento máximo que el hogar puede garantizar pagar con consumo estrictamente no negativo ($c_i \geq 0$) bajo cualquier trayectoria de choques.
- **Valor presente contingente**: Se empeña a lo sumo el valor presente de *toda* la dotación futura a precios de Arrow.
- **Sin operador de esperanza**: Los precios contingentes $Q(\cdot)$ ya descuentan estados y probabilidades.

Intercambio puro: problema del hogar (recursivo)

Entorno. Estados agregados $s \in \mathcal{S}$ (cadena de Markov con transición $\pi(s'|s)$), dotaciones contingentes $y_i(s) > 0$; en cada t se negocia un activo de un periodo con precios contingentes $q(s'|s)$. Sin producción ni gobierno.

El hogar i elige consumo c_i y posiciones $a_i'(s'|s)$ resolviendo la ecuación de Bellman

$$v_i(a_i, s) = \max_{\{c_i,\ a_i'(\cdot|s)\}} \ u_i(c_i, s) \ + \ \beta \sum_{s'} \pi(s'|s) v_i \left[a_i'(s'|s), s'\right]$$

sujeto a

$$c_i \ + \ \sum_{s'} q(s'|s)\, a_i'(s'|s) \ = \ y_i(s) \ + \ a_i, \qquad a_i'(s'|s) \ \geq \ \underline{a}_i(s'),$$

con $\underline{a}_i(s')$ el límite natural de endeudamiento, evaluado en el estado s' en que se paga el activo.

Equilibrio competitivo recursivo en intercambio puro

Definición. Un equilibrio recursivo es un conjunto

$$\left\{ \{v_i(\cdot), g_c^i(\cdot), g_a^i(\cdot)\}_{i=1}^I,\ q(\cdot|\cdot) \right\}$$

tal que, para todo estado s:

1. **Optimización del hogar:** Dado $q(\cdot|s)$, $v_i(a,s)$, $g_c^i(a,s)$ y $g_a^i(a,s;\cdot)$ satisfacen la ecuación de Bellman de cada hogar.
2. **Vaciado de mercados de activos (por estado y contingencia):**

$$\sum_{i=1}^{I} a_i'(s'|s) = 0 \quad \forall\, s' \in \mathcal{S}.$$

3. **Vaciado de mercados de bienes (por estado):**

$$\sum_{i=1}^{I} c_i(s) = \sum_{i=1}^{I} y_i(s) \ \equiv\ Y(s).$$

* Modelo de ciclos económicos reales: Prescott-Kydland (1980s)

$$\max_{l_t, c_t, K_t} \; E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[\gamma \log(1-l_t) + \log(c_t) \right]$$

Esperanza incondicional

⇒ Programación dinámica

sa: $c_t + K_t - (1-\delta) K_{t-1} = A_t K_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$

$K_0 > 0$ dado

No Ponzi

$e^{a_t} K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$

$$a_{t+1} = \rho a_t + \varepsilon_{t+1}$$

CPO:

$$[l_t]: \quad \beta^{t-1} \gamma (1-l_t^*)^{-1} = (1-\alpha) \frac{y_t^*}{l_t^*} \lambda_t^*$$

Eficiencia intratemporal estática:

$$\frac{\gamma c_t^*}{1-l_t^*} = (1-\alpha) \frac{y_t^*}{l_t^*}$$

$$[c_t]: \quad \beta^{t-1} (c_t^*)^{-1} = \lambda_t^*$$

$$[K_t]: \quad \lambda_t^* = E_t \left[\lambda_{t+1}^* \left(\alpha \frac{y_{t+1}^*}{K_t^*} + 1 - \delta \right) \right]$$

Euler

$$1 = \beta E_t \left[\frac{c_t^*}{c_{t+1}^*} \left(\alpha \frac{y_{t+1}^*}{K_t^*} + 1 - \delta \right) \right]$$

$$[\lambda_t]: \quad c_t^* + K_t^* - (1-\delta) K_{t-1}^* = A_t (K_{t-1}^*)^{\alpha} (L_t^*)^{1-\alpha}$$

$$\log(A_{t+1}) = \rho \log(A_t) + \varepsilon_{t+1}$$

$a' = \rho a + \varepsilon'$

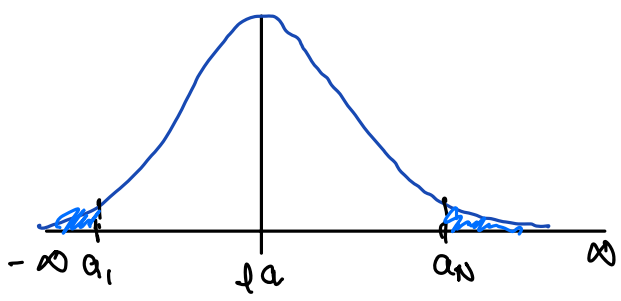
$\varepsilon' \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

(K, a): variables de estado $\quad \pi(a'|a)$

Ecuación de Bellman:

$$v(K, a) = \max_{l, c, K'} \left\{ \gamma \log(1-l) + \log(c) + \beta E_{a'} \left[v(K', a') \mid a \right] \right\}$$

sa: $c + K' - (1-\delta) K = e^{a} K^{\alpha} L^{1-\alpha}$



$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1N} \\ \vdots & & & \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \cdots & \pi_{NN} \end{bmatrix}$$

$$a \in A = \{ a_1, \ldots, a_N \}$$

$$\gamma C_t^* - (1-\alpha) A_t (K_{t-1}^*)^{\alpha} (l_t^*)^{-\alpha} (1 - l_t^*) = 0$$

$$\frac{\gamma C_t^*}{1 - l_t^*} = (1-\alpha) \frac{y_t^*}{l_t^*}$$

$$\gamma C \hat{C}_t^* - (1-\alpha) \frac{y}{l} (1-l) \alpha \left(\hat{K}_{t-1}^* - \hat{l}_t^* \right) + (1-\alpha) \frac{y}{l} \hat{l}_t^* = 0$$

$$\hat{C}_t^* - \alpha \hat{K}_{t-1}^* + \left(\alpha + \frac{l}{1-l} \right) \hat{l}_t^* = 0$$

A es variable de estado

$$1 = \beta E_t \left[\frac{C_t^*}{C_{t+1}^*} \left(\alpha \frac{y_{t+1}^*}{K_t^*} + 1 - \delta \right) \right]$$

$$\frac{1}{C_t^*} = \beta E_t \left[\frac{1}{C_{t+1}^*} \cdots \right.$$

$$C_t^* + K_t^* - (1-\delta) K_{t-1}^* = A_t (K_{t-1}^*)^{\alpha} (L_t^*)^{1-\alpha}$$

$$\log(A_{t+1}) = \rho \log(A_t) + \varepsilon_{t+1}$$

$$\hat{C}_t^* - \alpha \hat{K}_{t-1}^* - a_t + \left(\alpha + \frac{l}{1-l} \right) \hat{l}_t^* = 0$$

$$1 = \beta E_t \left\{ \frac{C_t^*}{C_{t+1}^*} \left[\alpha A_{t+1} (K_t^*)^{\alpha-1} (l_{t+1}^*)^{1-\alpha} + 1 - \delta \right] \right\}$$

$$0 = \beta E_t \left\{ \alpha \frac{y}{K} \left[a_{t+1} + (\alpha-1) \hat{K}_t^* + (1-\alpha) \hat{l}_{t+1}^* \right] + \frac{1}{\beta} \left(\hat{C}_t^* - \frac{C}{C} \hat{C}_{t+1}^* \right) \right\}$$

$$E_t \left\{ \hat{C}_t^* - \hat{C}_{t+1}^* + \left[1 - \beta(1-\delta) \right] \alpha \frac{y}{K} \left[a_{t+1} + (1-\alpha) \hat{l}_{t+1}^* - (1-\alpha) \hat{K}_t^* \right] \right\} = 0$$

$$C_t^* + K_t^* - (1-\delta) K_{t-1}^* - A_t (K_{t-1}^*)^{\alpha} (l_t^*)^{1-\alpha} = 0$$

$$C \hat{C}_t^* + K \hat{K}_t^* - (1-\delta) K \hat{K}_{t-1}^* - y \left[a_t + \alpha \hat{K}_{t-1}^* + (1-\alpha) \hat{l}_t^* \right] = 0$$

$$\frac{C}{y} \hat{C}_t^* + \frac{K}{y} \hat{K}_t^* - (1-\delta) \frac{K}{y} \hat{K}_{t-1}^* - a_t - \alpha \hat{K}_{t-1}^* - (1-\alpha) \hat{l}_t^* = 0$$

$$\hat{C}_t^* - \alpha \hat{K}_{t-1}^* - a_t + \left(\alpha + \frac{1}{1-l}\right)\hat{l}_t^* = 0$$

$$\hat{C}_t^* = \psi_{ca} a_t + \psi_{ck} \hat{K}_{t-1}^*$$
$$\hat{K}_t^* = \psi_{ka} a_t + \psi_{kk} \hat{K}_{t-1}^*$$
$$\hat{l}_t^* = \psi_{la} a_t + \psi_{lk} \hat{K}_{t-1}^*$$

$$\psi_{ca} a_t + \psi_{ck} \hat{K}_{t-1}^* - \alpha \hat{K}_{t-1}^* - a_t + \left(\alpha + \frac{1}{1-l}\right)\left(\psi_{la} a_t + \psi_{lk} \hat{K}_{t-1}^*\right) = 0$$

$$\left[\psi_{ca} - 1 + \left(\alpha + \frac{1}{1-l}\right)\psi_{la}\right] a_t + \left[\psi_{ck} - \alpha + \left(\alpha + \frac{1}{1-l}\right)\psi_{lk}\right] \hat{K}_{t-1}^* \equiv 0$$

$$\hat{C}_{t+1} = \psi_{ca} a_{t+1} + \psi_{ck} \hat{K}_t^* =$$
$$= \psi_{ca}\left(\rho a_t + \varepsilon_{a,t+1}\right) +$$
$$+ \psi_{ck}\left(\psi_{ka} a_t + \psi_{kk} \hat{K}_{t-1}^*\right)$$

$$E_t\left\{\hat{C}_t^* - \hat{C}_{t+1}^* + \left[1 - \beta(1-\delta)\right]\alpha \frac{y}{k}\left[a_{t+1} + (1-\alpha)\hat{l}_{t+1}^* - (1-\alpha)\hat{K}_t^*\right]\right\} = 0$$

$$E_t\left\{\psi_{ca} a_t + \psi_{ck} \hat{K}_{t-1}^* - \left[\psi_{ca}\left(\rho a_t + \varepsilon_{a,t+1}\right) + \psi_{ck}\left(\psi_{ka} a_t + \psi_{kk} \hat{K}_{t-1}^*\right)\right] + \right.$$

$$+ \left[1 - \beta(1-\delta)\right]\alpha \frac{y}{k}\left[\rho a_t + \varepsilon_{a,t+1} + (1-\alpha)\left[\psi_{la}\left(\rho a_t + \varepsilon_{a,t+1}\right) + \psi_{lk}\left(\psi_{ka} a_t + \psi_{kk} \hat{K}_{t-1}^*\right)\right] -\right.$$
$$\left.\left. - (1-\alpha)\left(\psi_{ka} a_t + \psi_{kk} \hat{K}_{t-1}^*\right)\right]\right\} = 0$$

$$\psi_{ca} - \rho \psi_{ca} - \psi_{ca} E_t \varepsilon_{a,t+1} + \psi_{ck} \psi_{ka} + \left[1 - \beta(1-\delta)\right]\alpha \frac{y}{k}\left[\rho + (1-\alpha)\psi_{la}\rho + \psi_{lk}\psi_{ka} - (1-\alpha)\psi_{ka}\right] = 0$$